專題: 線性轉換 (Linear Transformation) 的實驗

本實驗希望透過簡單的問題「透視 (Visualize)」線性代數中非常的重要的「線性轉換 (Linear Transformation)」觀念。觀念可以從嚴謹的數學證明獲取, 也可以從實驗的結果得到瞭解。MATLAB 是一個方便的工具, 透過幾個指令很清楚的看到「觀念,」相信有助於學習枯燥的線性代數。

實驗1: 假設五個變數 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 其中 x_1, x_2, x_3 為線性獨立,$x_4 = x_1 + x_2$, $x_5 = x_2 + x_3$, 由這5個變數的樣本構成的矩陣 $A = [\underline{x}_1\ \underline{x}_2\ \underline{x}_3\ \underline{x}_4\ \underline{x}_5]$, 其

1. Rank(A)?
2. $A^T A$ 有幾個值為0的特徵值呢?

試著去模擬這個問題。從模擬的樣資料中看看 A 的特性。

---

x_1, x_2, x_3的樣本值可以從亂數產生器 (譬如假設為標準常態) 產生,x_4, x_5 再從這三組資料相加取得。樣本數的決定是實驗的一部份, 試著嘗試不同的數量, 看看結果有什麼不同。

實驗2: 圖形的轉向即座標位置的轉換, 可以利用轉置矩陣 T 來幫忙。譬如樣將向量 $a = [2\ \ 1]^T$ 逆時針轉 $\theta = 30^o$, 可以這麼做

$$b = Ta, \qquad T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

如圖1所示。向量圖形是利用 MATLAB(7.x 以上) 指令 biplot 繪製的。
透過這轉置矩陣 T 來座標位置的轉換, 你是否可以做出如右圖將橢圓旋轉90度。

實驗3:

1. 利用 Copulas 產生兩組具相依性的模擬資料, 畫出如圖2的散佈圖。

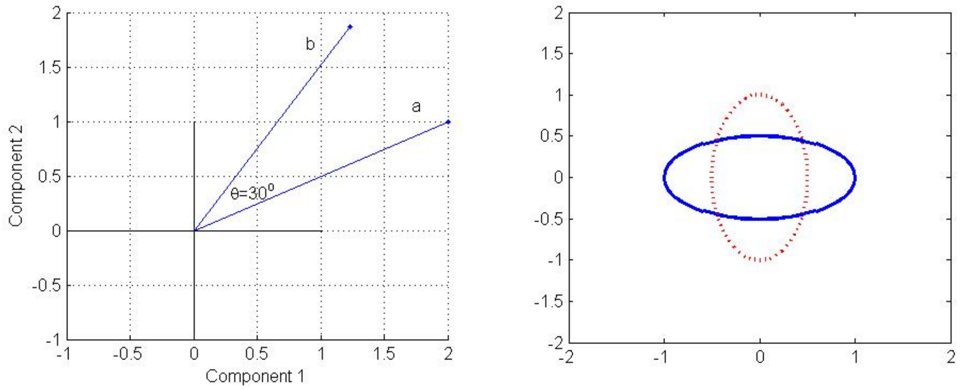

圖 1: 座標(圖形) 轉換

2. 建立兩變數的共變異矩陣 $\Sigma_X = cov(x_1, x_2)$, 並計算其特徵值與特徵向量。

$Ex = cov([x1\ x2]);$

$[V, D] = eig(Ex);$

$[lambda, I] = sort(diag(D), 'descend');$%依大小排列

$V = V(:, I)$ %特徵向量依特徵值大小重新排列

3. 建立矩陣 $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]^T$, 其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 爲共變異矩陣 Σ_X 的兩個特徵向量。計算 $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$, 即原資料經座標轉換後的新座標。新變數 z_1 與 z_2 的關係如圖3。請注意這張圖與圖2的關係, 圖3是將圖2的部分轉正來看。

實驗4: 主成分分析是將原變數作線性組合, 成爲另一組變數, 組合的原則是保留原變數間最大的變異, 且新變數彼此不相關。這個練習想去瞭解不同的組合的變異數大小與幾何意義。

假定 x_1, x_2 兩個變數, 樣本資料爲 $x_1 = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]$, $x_2 = [2\ 1\ 4\ 5\ 4]$, 如果想要用一個新的變數 z_1 來代表這兩個變數, 在希望保留原變數最大變異 (variance) 的前提下, 下列哪一個組合最理想:

1. $z_1 = x_1$

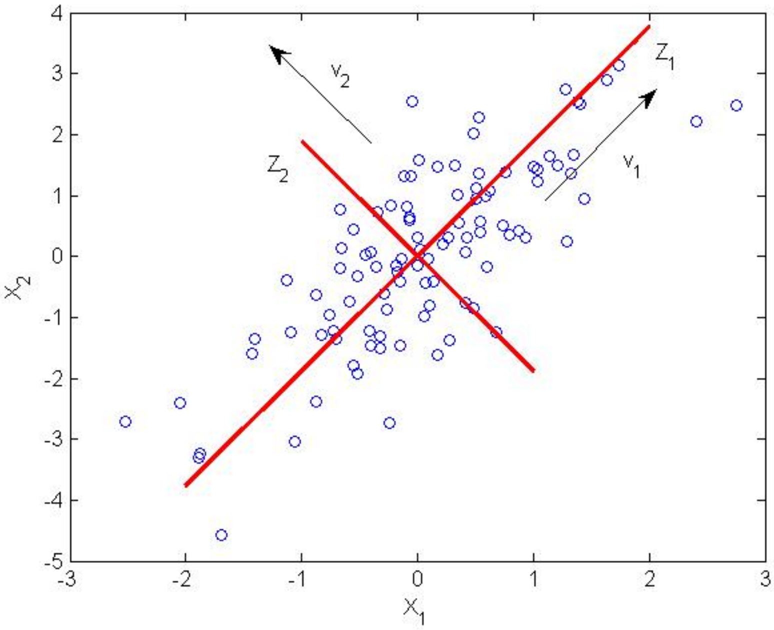

圖 2: 線性轉換的幾何意義: 座標轉換

2. $z_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x_2$

3. $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$

4. $z_1 = x_2$

問題:

- z_1 的樣本值來自 x_1, x_2 資料的轉換, 這相當前面練習所說的座標軸轉換, 而且只代表轉換過後的一個座標軸。請根據上述的組合, 分別畫出這個座標軸 (含 x_1, x_2 的散佈圖) 如圖 4 所示。
- 分別計算新變數 z_1 的變異數。哪一個最大?
- 分別計算新的座標值與新座標軸垂直距離的平方和。哪一個最小?

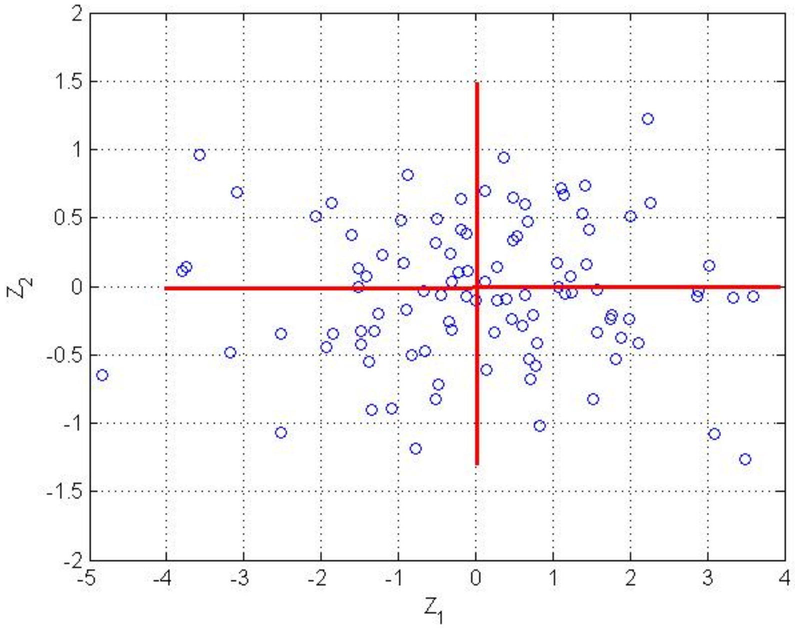

圖 3: 座標轉換後的新座標

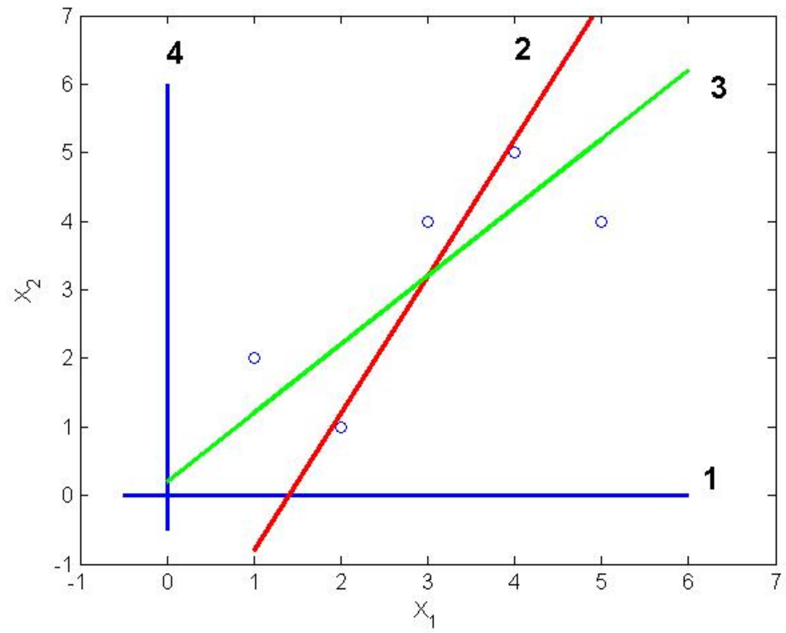

圖 4: 不同組合的幾何意義與變異量。