

An Introduction to the Cash-in-Advance Model

De-Xing Guan (官德星，國立台北大學經濟學系)

假設某代表性個人求終身效用現值和 $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{1t}, c_{2t})$ 最大，他每期的預算限制式為 $py_t + Rb_t = p(c_{1t} + c_{2t}) + (b_{t+1} - b_t) + (m_{t+1} - m_t)$ ， $0 < \beta < 1$ ，其中 c_{1t} 為現金商品 (*cash good*) 的消費， c_{2t} 為信用商品 (*credit good*) 的消費， b_t 為第 t 期期初持有的債券金額， m_t 為第 t 期期初持有的現金， y_t 為外生給定的產出， p 為商品價格， R 為名目利率，假設都不隨時間改變。由於現金商品不能刷卡，所以必須受限於所謂的付現交易 (*cash-in-advance*) 限制式： $pc_{1t} \leq m_t$ ¹。現在代表性個人想要極大化如下的拉氏函數：

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_{1t}, c_{2t}) + \lambda_t [py_t + Rb_t - p(c_{1t} + c_{2t}) - (b_{t+1} - b_t) - (m_{t+1} - m_t)] + \mu_t (m_t - pc_{1t})\}$$

其中 λ_t, μ_t 是拉氏乘數。此極大化問題的一階必要條件為：

$$(1) \frac{\partial L}{\partial c_{1t}} = 0 \Rightarrow \beta^t \left(\frac{\partial u}{\partial c_{1t}} - \lambda_t p - \mu_t p \right) = 0, \forall t$$

$$(2) \frac{\partial L}{\partial c_{2t}} = 0 \Rightarrow \beta^t \left(\frac{\partial u}{\partial c_{2t}} - \lambda_t p \right) = 0, \forall t$$

$$(3) \frac{\partial L}{\partial b_{t+1}} = 0 \Rightarrow \beta^t [(-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1})(1 + R)] = 0, \forall t$$

$$(4) \frac{\partial L}{\partial m_{t+1}} = 0 \Rightarrow \beta^t [-\lambda_t + \beta(\lambda_{t+1} + \mu_{t+1})] = 0, \forall t$$

經過一番代換，最後可得如下的歐勒方程式 (*Euler equations*)：

$$(5) \frac{\partial u}{\partial c_{2t}} = \beta \frac{\partial u}{\partial c_{2,t+1}} (1 + R), \forall t$$

$$(6) \frac{\partial u}{\partial c_{2t}} = \beta \frac{\partial u}{\partial c_{1,t+1}}, \forall t$$

¹ 在效用極大時，人們會將所有現金花在現金商品上，此時付現交易限制式的等號會成立。

至於歐勒方程式的經濟解釋，式 (5) 描述的是一般跨期消費的最適配置，或是每期消費和儲蓄的最適選擇，而式 (6) 比較少見，因為它描述的是付費方式的選擇，也就是付現還是刷卡？

一個比較簡單的解釋方式是將式 (6) 代入式 (5)，如此可以得到：

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial c_{1t}} = \frac{\partial u}{\partial c_{2t}}(1+R), \forall t$$

這表示用現金支付時，我們可以消費的商品數量，會比用刷卡支付時來的少。換句話說，對同一單位的商品消費而言，現金消費的邊際效用會比刷卡消費的邊際效用來得高。

舉例來說，如果我這個月用現金買 iPhone13 要花 \$20,200，但是如果我選擇刷卡而不是付現，其實只需支付 \$20,200/(1+R) 這麼多錢，也就是說如果月利率是 1%，儘管刷卡當下信用卡公司仍需支付店家 \$20,200，但是因為我可以延後一個月再繳卡費，這相當於賺了一個月的利息，所以實際上我只從荷包拿了 \$20,000 (=20,200/1.01) 出來，剩下 \$200 則由利息支付。所以刷卡可以省錢的原因來自卡費是一期後才付，可以多賺一期的利息。因此如果你寧可付現也不願刷卡，就表示付現所帶給你的邊際效用比刷卡高，這是當我們假設人們是理性極大化效用者 (rational utility maximizer) 的必然結果。然而如果這個假設不成立呢？