Financial Institutions Management

Lecture 2: The Duration Model

— **分析利率變化對資產負債表之影響** (data source: 台大財務金融系陳業寧教授)

一、 Duration的定義與經濟含意

1. 由zero-coupon bond開始。當利率改變一點時，債券價值變化與到期日成正比

$$P = \frac{F}{(1+R)^N}.$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{-N*F}{(1+R)^{N+1}} = -P*\frac{N}{1+R}.$$

$$\frac{dP/P}{dR/(1+R)} = -N.$$

2. 對於不是zero-coupon bond的債券，可定義一「以現金流量現值」為加權之加權到期日，此即duration

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=1}^{N} CF_t * DF_t = \sum_{t=1}^{N} PV_t.$$

$$D \equiv \sum_{t=1}^{N} (\frac{PV_t}{P} * t).$$

(所有PV_t / P的總和為1)

3. 由數學證明duration的含意

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=1}^{N} CF_t * DF_t = \sum_{t=1}^{N} PV_t.$$

$$\frac{dP}{dR} = \sum_{t=1}^{N} \frac{-t*CF_t}{(1+R)^{t+1}} = \frac{-1}{1+R}\sum_{t=1}^{N} (PV_t * t).$$

$$\frac{dP/P}{dR/(1+R)} = -\sum_{t=1}^{N} (\frac{PV_t}{P} * t) = -D.$$

$$\frac{dP}{P} = -dR*\frac{D}{1+R} = -dR*MD.$$

4. 特別債券的duration

(i) Zero-coupon bond: D = N.

(ii) Consol bond: D = (1 + R)/R.

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+R)^t} = \frac{1}{R}.$$

$$D = \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{R}{(1+R)^t} * t\right) = 1 + \frac{1}{R}.$$

(iii) Floating-rate Loans (pp. 177-178)

Pay		C_1	C_2	C_3	C_4	
Set	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	

|----x---|-------|--------|-------|-------|--- …

0 1 2 3 4 5

$$P = \frac{C_1}{(1+0.5R)} + \frac{C_2}{(1+0.5R)(1+R)} + \frac{C_3}{(1+0.5R)(1+R)^2} + \ldots$$

$$P = \frac{C_1}{(1+0.5R)} + \frac{1}{(1+0.5R)}\left[\frac{C_2}{(1+R)} + \frac{C_3}{(1+R)^2} + \ldots\right].$$

$$P = \frac{C_1 + P_1}{(1+0.5R)}.$$

（假設未來的C_i會調整到與R相等）

5. Duration 的一些性質（將duration看成重心）

(i) M (maturity)↑ → D↑

(ii) C (coupon rate)↑ → D↓

(iii) R (yield)↑ → D↓

O O O O O O O O

|------|------|------|------|------|------|------|---… ---|

Δ

$$\sum_{t=1}^{N}[\frac{PV_t}{P}*(t-D)]=0.$$

二、利用duration規避個別負債利率風險

例子、某保險公司目前有1,000元現金，五年後須付出 $1{,}000*(1+0.08)^5=1{,}469$ 元。R=8%。該公司找到以下債券，是否可用此債券消除未來付款風險？

- 債券性質：face value = 1,000元，六年後到期，coupon rate=8%（一年付一次）

⇒ P = 1,000元，D = 4.99

- 作法：以現金購買該債券，五年後出售該債券，如有債券利息收入則投資短期資產（1年到期，8%）

- 三種情況下，5年後公司的可用現金

(i) R = 8%

賣債券所得：1,080/(1.08) =1,000

債券利息所得：$80*(1.08)^4+\ldots+80=469$

(ii) R = 7% (買券後所有利息瞬間降低1%)

賣債券所得：1,080/(1.07) =1,009

債券利息所得：$80*(1.07)^4+\ldots+80=460$

(iii) R = 9% (買券後所有利息瞬間提高1%)

賣債券所得：1,080/(1.09) = 991

債券利息所得：$80*(1.09)^4+\ldots+80=478$

⇒ 均剛好可償還負債1,469元，but why?

經濟直覺： ΔP/P = - ΔR*D/(1+R).

買債券後，$P_A = P_L$，$D_A = D_L$，又所有利率均為8%，資產與負債的現值變化相同，故五年後價值亦相同

三、利用duration規避金融機構整體利率風險

1. Duration gap (X_{iA}的總和為1，X_{jL}的總和為1)

$$D_A = X_{1A}\, D_1^{A} + X_{2A}\, D_2^{A} + \ldots + X_{nA}\, D_n^{A}.$$

$$D_L = X_{1L}\, D_1^{L} + X_{2L}\, D_2^{L} + \ldots + X_{mL}\, D_m^{L}.$$

(i) 若目標為完全消除自有資本之利率風險，則應調整至 duration gap $= D_A - k^*D_L = 0$， where $k = L/A$

$$E = A - L \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \Delta A - \Delta L$$

$$\Delta A = -\Delta R/(1+R) * D_A * A$$

$$\Delta L = -\Delta R/(1+R) * D_L * L$$

$$\Delta E = -\Delta R/(1+R) * A * (D_A - k^*D_L)$$

* Duration gap與利率變化之關係

	DG > 0	DG < 0
$\Delta R > 0$	$\Delta E < 0$	$\Delta E > 0$
$\Delta R < 0$	$\Delta E > 0$	$\Delta E < 0$

(ii) 若目標為維持固定自有資本比率，則$D_A = D_L$

$$\frac{E}{A} = \frac{A-L}{A} = \frac{A+\Delta A - L - \Delta L}{A+\Delta A} = \frac{(A-L)+(\Delta A - \Delta L)}{A+\Delta A}.$$

$$\Rightarrow \quad \Delta L / \Delta A = L / A \quad \Rightarrow \quad D_A = D_L$$

2. 應用期貨規避金融機構利率風險 (pp. 692-702)

$\Delta E = -\Delta R/(1+R) * A * (D_A - k*D_L)$

$\Delta F = -\Delta R/(1+R) * F * D_F$, where $F=N_F*P_F$

- 如要消除所有利率風險，則$\Delta E + \Delta F = 0$

$$N_F = -\frac{(D_A - kD_L)A}{D_F * P_F}$$

例子、$D_A = 5$ yrs, $D_L = 3$ yrs, $k = 0.9$, $A = 100$ mil.

$P_F = 97{,}000$, $D_F = 9.5$ yrs (20-yr, $C = 8\%$)

$\Rightarrow N = -249.59$.

四、利用duration避險時應注意之事項 (App. 9A)

1. 利用duration避險是一動態問題

例子、前述規避個別負債利率風險之例子

設4年後在領完當年利息收入後，該保險公司：

資產：現金360.5元(D=0)，債券1,000元（D=1.93）

負債：現值1,360.5 ($1{,}000*(1+0.08)^5/(1+0.08)$)元 (D=1)

$\Rightarrow$ 資產與負債之duration不相同 (1.42 > 1)

(若此時利率上升至9%，則該公司將有損失)

	1	2	3	4	5
D_A	3.99	3.07	2.21	1.42	0.68
D_L	4	3	2	1	0

2. Convexity：二階逼近

* 使用時機：當ΔR不是很小時

* $d^2P/dR^2 > 0$

*由泰勒展開式

$$P(R+\Delta R)=P(R)+\frac{dP/dR}{1!}*\Delta R+\frac{d^2P/dR^2}{2!}*(\Delta R)^2.$$

$$\frac{P(R+\Delta R)-P(R)}{P}=\frac{dP/dR}{P}*\Delta R+\frac{1}{2}\frac{d^2P/dR^2}{P}*(\Delta R)^2.$$

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{-D}{1+R}*\Delta R+\frac{1}{2}*CX*(\Delta R)^2.$$

$$CX\approx\frac{d^2P/dR^2}{P}\approx\frac{1}{P}\left[\frac{\frac{P(R+\Delta R)-P}{\Delta R}-\frac{P-P(R-\Delta R)}{\Delta R}}{\Delta R}\right]$$

$$=\frac{1}{(\Delta R)^2}[\frac{P(R+\Delta R)-P}{P}+\frac{P(R-\Delta R)-P}{P}].$$

* 對照P249的例子，在計算CX時，課本中令 $\Delta R=0.01\%$

（Scaling factor $=10^8=1/(\Delta R)^2$）

3. 正斜率的 yield curve

在做如下假設時之調整方法 (pp. 252-254)

$$\frac{\Delta R_1}{1+R_1}=\frac{\Delta R_2}{1+R_2}=\frac{\Delta R_3}{1+R_3}=\ldots$$