Ch 9 股票選擇權的特性

Properties of Stock Options

Notations

- C：The value of American call option
- P：The value of American put option
- c：The value of European call option
- p：The value of European put option
- K：The strike (exercise) price
- T：The time to maturity
- σ：The volatility of the stock price
- r：The risk-free interest rate
- q：The dividend yield rate of the stock

Black-Scholes Pricing Formulas

$$c = S\,N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S\,N(-d_1)$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Merton's Pricing Formulas

$$c = Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1)$$

where

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

影響選擇權價格的因素
Factors Affecting Option Prices

- 影響選擇權價格的因素有六：
  - S：The current stock price
  - K：The strike (exercise) price
  - T：The time to maturity
  - σ：The volatility of the stock price
  - r：The risk-free interest rate
  - q：The dividend yield rate of the stock

Summary

變數	c	p	C	P
S_0	+	−	+	−
K	−	+	−	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	−	+	−
q	−	+	−	+

股 價 與 履 約 價
Stock Price and Strike price

- The final payoff of a call option:
  C(T)= max(S(T) – K , 0)
  - S↑ ➔ C↑
  - K↑ ➔ C↓
- The final payoff of a put option:
  P(T) =max(K - S(T) , 0)
  - S↑ ➔ P↓
  - K↑ ➔ P↑

存續期間 (Time to Maturity)

- 美式選擇權距到期日越長，價值越大。
  - 持有權力越長，越值錢。
- 歐式選擇權則不一定。
  - 歐式買權：
    - 如果不發放股利，距到期日越長，價值越大。
    - 若在持有期間內，發放大量股利，則距到期日越長，價值不一定越大。
  - 歐式賣權：
    - 如果在價外（OTM），距到期日越長，價值越大。
    - 如果在深價內（DITM），距到期日越長，價值越小。

波動度 (Volatility)

- 詳盡的說明，於 Ch12 介紹。
- 波動度可以想成是標的資產價格的變化程度。

波動度越大，表示標的資產價格的變化程度越大。

- 波動度越大，選擇權價值越大。
  - 若是持有股票，標的資產價格變化越大，可能獲利很多，也可能損失很多。
  - 若是持有選擇權，標的資產價格變化越大，只可能獲利增加，損失至多為 0。

無風險利率 (Risk-free Interest Rate)

- 利率變動對選擇權價值的影響，無確定答案。
- 利率上升，其他因素不變：後兩者較強勢。
  - r↑➔ C ↑ & P↓
  - r↓➔ C ↓ & P↑
    - 折現率上升，所以 C 與 P 的價值下降。
    - C 可以延遲支付，收取的利息增加，C 價值上升。
    - P 延遲標的賣出，利息成本增加，P 價值下降。
- 實務上，利率與股價呈反向變動。所以利率上升，股價會下跌，因此：
  - C ↓
  - P ↑

股利 （Dividends）

- 股利 ↑➔ 股價↓
  - 股利 ↑➔ C↓
  - 股利 ↑➔ P↑

選擇權價格的上下界

Upper and Lower Bounds for Option Prices

Assumptions

- There are no transaction costs.
- All trading profits (net of trading losses) are subject to the same tax rate.
- Borrowing and lending are possible at the risk-free interest rate.

上界 (Upper Bounds)

- $c \leqq S, C \leqq S$
  - 買權給予投資人購買某標的資產的權利，故該權利價值不應超過現貨價格，否則以現貨價格購入即可。
  - C 最好是在 K=0，該權利允許免費持有 S，因此該權利最大價值是 S，若超過，直接在市場上買。
- $p \leqq K, P \leqq K$
  - 賣權給予投資人出售某標的資產的權利，故該權利價值不應超過履約價格。
  - P 最好是在 S=0，可以履約價賣，收入K。因此 P 的最大價值就是 K。超過 K，透過P賣收入為負，不如不要賣。
- $p \leqq K \times \exp(-rT)$

無現金股利的股票買權價格下界

Lower Bound for Calls on Non-Dividend-Paying Stocks

- 歐式買權的下界： $\text{Max}(S - K \times \exp(-rT), 0)$
- 證明：

Portfolio A : 一單位買權的長部位
Portfolio B : 買一單位股票並借入現金 Kxexp(-rT)
到期時 (time T), 兩個投資組合的到期現金流量為：
若 $S(T) \geqq K$: $A = (S(T) - K)$ ； $B = S(T) - K$ ➔ A=B
若 $S(T) < K$: $A= 0$ ； $B= S(T) - K < 0$ ➔ A > B

➔ Payoff A ≧ Payoff B
因此在無套利機會下, Price A > Price B.
$c \geqq S - K\times\exp(-rT)$ ➔ $c \geqq S - K\times\exp(-rT)$
➔ $c \geqq \text{Max}(S - K \times \exp(-rT), 0)$

Example 9.1

- S=20, K=18, r=10%, T=1 ➔ $S - K \times \exp(-rT) = 3.71$
- 若 c = 3 （太低）, 有套利機會存在：
- 期初：賺取 + 20 -3 -16.29 = 0.71
  - 放空一單位股票
  - 買一單位買權
  - 存入 $K \times \exp(-rT) = 16.29$
- 期末：Payoff 恆大於0！！
  - 若 $S(T) \geqq K=18$, $-S + (S-K) + K = 0$
  - 若 $S(T) < K=18$, 假設S(T)=17, $-17 + K = 1$

Example 9.2

- Consider a European call option on a non-dividend-paying stock when the stock price is $51, the strike price is $50, the time to maturity is 6 months, and the risk-free rate of interest is 12% per annum.
- In this case, S=51, K=50, T=0.5, r=0.12.
- A lower bound for the option price is

$S-K \times \exp(-rT) = 51-50 \times \exp(-0.12 \times 0.5) = \$3.91$

無現金股利的股票賣權價格下界

Lower Bound for Puts on Non-Dividend-Paying Stocks

- 歐式賣權的下界： $\text{Max}(K \times \exp(-rT) - S, 0)$
- 證明：

Portfolio C : 一單位賣權的長部位

Portfolio D : 現金存款 $K \times \exp(-rT)$ 並放空一單位股票

到期時： Payoff C ≧ Payoff D

若 $S(T) < K$: $C = K - S(T)$; $D = K - S(T) \Rightarrow C=D$

若 $S(T) \geqq K$: $C = 0$; $D= K - S(T) < 0 \Rightarrow C > D$

無套力機會存在下, Price C > Price D.

$p \geqq K \times \exp(-rT) - S \Rightarrow p \geqq K \times \exp(-rT) - S$

$\Rightarrow p \geqq \text{Max}(K \times \exp(-rT) - S, 0)$

Example 9.3

- $S=37$, $K=40$, $r=5\%$, $T=0.5 \Rightarrow K \times \exp(-rT) - S = 2.01$
- 若 p = 1 (太低), 有套利機會存在:
- 期初: 賺取 -1-37+39.01 = 1.01
  - 進入一單位賣權長部位
  - 買入一單位股票
  - 借款 $K \times \exp(-rT) = 39.01$
- 期末：Payoff 恆大於 0
  - 若S(T) > K，假設 S(T)=43:
    0+43 – 40 =3 >0
  - 若S(T) < K：
    (K-S(T)) +S(T) –K =0

Example 9.4

- Consider a European put option on a non-dividend-paying stock when the stock price is $38, the strike price is $40, the time to maturity is 3 months, and the risk-free rate of interest is 10% per annum.
- In this case, S=38, K=40, T=0.25, r=0.1.
- A lower bound for the option price is

$K \times \exp(-rT) - S = 40 \times \exp(-0.1 \times 0.25) - 38 = \$1.01$

買權賣權平價公式 (Put-Call Parity)

- Put-Call Parity for European Options:

  $$c(t) + K \times \exp(-r \times (T-t)) = p(t) + S(t)$$

- 證明：
  - **At time 0:**
    - **Portfolio A: + c + K × exp(-rT)**
    - **Portfolio B: + p + S**
  - **At time T:**
    - **Both are worth max(S(T), K).**
  - 兩投資組合在期末有相同收益，又因為是歐式選擇權，到期前不能提前履約，所以在無套利機會下，兩投資組合期初價值相同。

買權賣權平價公式 (Put-Call Parity)

- Put-Call Parity for European Options:

  $$c(t) + K \times \exp(-r \times (T-t)) = p(t) + S(t)$$

- Put-call parity 說明了現貨、買權、賣權三者之間的關係。
- Put-call parity 若不成立，則會有套利機會出現。

Example

- S=31, r=10%, T=0.25y ,c = 3, K=30 ➔ p = 1.26
- If p =2.25 (Too High!), then

  期初: 賺取 -3 + 31 -29.26 + 2.25 =0.99
  - 一單位買權長部位， 放空一單位股票，
    持有存款 K × exp(-rT) = 29.26
  - 放空一單位賣權

  期末:
  - S(T) > K=30 ➔ (S(T) – K) - S(T) +K -0 = 0
  - S(T) < K =30 ➔ 0 –S(T) +K – (K-S(T)) = 0

Example

- S=31, r=10%, T=0.25y ,c = 3, K=30 ➔ p = 1.26
- If p =1 (太低)
  - 期初賺取：-1+3+29.26-31 =0.26
    - 進入一單位賣權長部位
    - 進入一單位買權短部位，借款 K × exp(-rT) = 29.26，買進一單位股票
  - 期末時：
    - S(T) > K=30 ➔ 0 + (K-S(T)) – K +S(T) = 0
    - S(T) < K =30 ➔ (K-S(T)) +0 –K + S(T) = 0

Put-Call Parity for American Options

- $S - K \leqq C - P \leqq S - K \times \exp(-rT)$
- See Problem 9.18.

Business Snapshot 9.1
Put-Call Parity and Capital Structure

- 某公司以零息債券與股票來做為資產的融資來源。假設零息債券面額為 K，5 年後到期。假設公司不發行股利。假設公司 5 年後資產價值為 A。
- 5 年後，股東權益為 Max(A(T) -K, 0)，等於股東握有一個買權，標的為公司資產價值A(T)，履約價為負債價值 K：
  - 若公司資產價值 A(T) 大於 K，則股東會償還債務。
  - 若公司資產價值 A(T) 小於 K，則股東會宣布破產，而不清償債務。
- 5 年後，債券價值為 Min (A(T), K) = K- Max(K-A(T), 0):
  - 債權人到期時，除了債權 K ，還給予股東一個賣權，此賣權標的為公司資產，履約價為公司負債 K：
- 期初，公司資產負債關係為：
- 股東權益 ＝ c

  負債 = PV(K) – p

  資產 A(0) = c+ PV(K) – p

  ➔ **Put-Call Parity : c + PV(K) = p + A(0)**

Early Exercise:
Calls on a Non-Dividend-Paying Stock

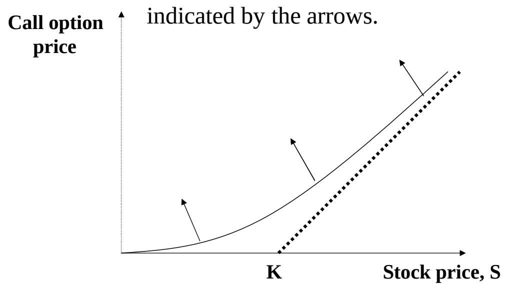
- 若標的是沒有發放股利的股票，則美式買權的最適履約時點為到期日，即不提前履約。理論上，若標的是沒有發放股利的股票，則美式買權等於歐式買權。
  - 因為不發放股利，所以股價不會因發放股利大幅下降，所以延後履約可以賺取利息。
  - 選擇權價值＝內含價值 ＋ 時間價值，馬上履約損失了時間價值。
  - 若一定要履約，以持有股票。則最佳策略是將買權在市場賣掉，然後在於市場上購買。

  $c \geqq S - K \times \exp(-rT)$, $C \geqq c$,

  ➔ $C \geqq S - K \times \exp(-rT)$ ➔ $C \geqq S - K$ (內含價值)

Variation of an American or European Call on a Non-dividend-paying Stock with the Stock Price S

As r or T or the volatility increases, the line relating the call price to the stock price moves in the direction indicated by the arrows.

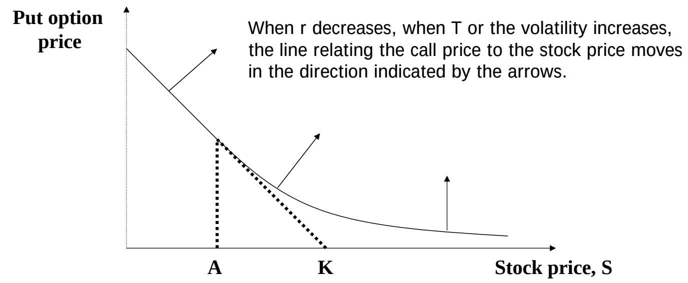


Early Exercise: Puts on a Non-Dividend-Paying Stock

- 若標的是沒有發放股利的股票，則美式賣權提前履約是可行的。事實上，當賣權是深價內時，提前履約才是明智之舉。
  - 極端例子：假設股價為 0，則賣權最大利潤為K，馬上履約即可賺取最大利潤。
- 美式賣權價值大於歐式賣權價值，即 P > p 。
-

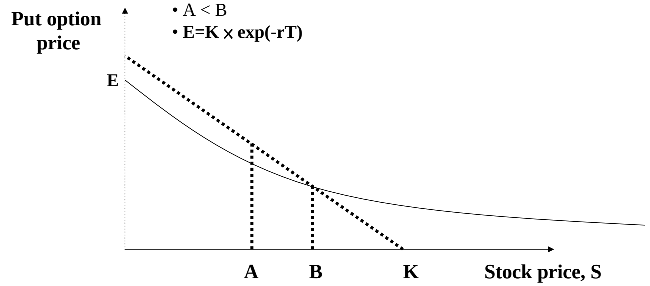
Variation of Price of an American Put with the Stock Price S

當股價很低時，提前履約美式賣權是有利的。假設 A 為臨界點，當股價低於 A 時，會提前履約。因此，當 S < A，賣權提前履約，所以賣權價值等於內含價值＝ K － S。



Variation of Price of an European Put with the Stock Price S

- 因為美式賣權價值大於歐式賣權，又因為美式賣權在 S < A時，價值等於內含價值，因此歐式賣權價值可能低於內含價值。亦即，時間價值可能為負。
- A < B
- **E=K × exp(-rT)**



股利的影響

Effect of Dividends

股利的影響 (Effect of Dividends)

- 之前都是在無股利發放的情形下討論，以下討論有股利發放的情形。
- 在美國，交易所交易的股票選擇權，到期日一般皆小於 1 年。期間，股票所發放的股利可以準確的預估。
- 以下用 D 來表示選擇權存續期間，所發股利的現值。

歐式買權與賣權的下界

- 買賣權的下界：
  - $c \geqq S - D - K \times \exp(-rT)$
  - $p \geqq D + K \times \exp(-rT) - S$
- 證明如前：
  - European Call
    - Portfolio A: + c + D + K × exp(-rT)
    - Portfolio B: + S
  - European Put
    - Portfolio C: + p + S
    - Portfolio D: + D + K × exp(-rT)

提前履約（Early Exercise）

- 在有發放股利的情形下，美式買權提前履約可能是有利的。
- 因為在除息日時 (Ex-Dividend Date)，股價會因股利發放而突然下降，造成買權價值下降，因此在除息日前提前履約，可能是有利的。
- 美式買權的最適履約時點，僅有可能在除息日前。

Put-Call Parity

- $c + D + K \times \exp(-rT) = p + S$
- $S - D - K \leqq C - P \leqq S - K \times \exp(-rT)$

Exercises

- 2,3,7,9,10,11,12,14,16,22