Ch 6 利率期貨

Interest Rate Futures

Money Market (貨幣市場) vs. Capital Market (資本市場)

- Financial market are segmented into money markets and capital markets.
- Money Market (貨幣市場)

---- Short-term, marketable, liquid, low-risk debt securities.

- Capital Market (資本市場)

---- Longer-term and riskier securities.

Treasury Bonds, Notes and Bills

- Treasury Bond: A long-term, coupon-bearing instrument issued by the government to finance its debt. (10yr ≦ ＊)
- Treasury Note: A mid-term, coupon-bearing instrument issued by the government to finance its debt. (1yr ≦ ＊≦10yr)
- Treasury Bill: A short-term, non-coupon-bearing instrument issued by the government to finance its debt. (＊≦1yr)

天數計算的慣例 (Day Count Conventions)

- Day count conventions vary from country to country and instrument to instrument.
  - Actual/365: Money market instruments in Australia, Canada.
  - Actual/360: LIBOR for all currencies except sterling.
    - Actual/365: LIBOR for sterling.
  - Actual/Actual: Euro-denominated bond.

天數計算的慣例 (Day Count Conventions)

- 『**天數**』是指計算利息的天數。
- 天數計算一般以符號 **X/Y** 表示。
  - X 表示計息期間的天數。
  - Y 表示每一期的總天數
- 美國常用的三種天數計算方式：
  - Actual / Actual
    - U.S. Treasury Bonds
  - 30 / 360
    - U.S. Corporate Bonds, U.S. Municipal Bonds
  - Actual / 360
    - U.S. Treasury Bills, U.S. Money Market Instruments

5

Example：Actual / Actual

- 孳息天數與計息期間都以實際天數計算。
- 假設某個政府付息債券，使用 Actual/Actual方式計算天數。假設票面利率 8%，每半年支息一次，於 3/1 與 9/1 發放。請問在 3/1 至 7/3 日之間，此債券孳息多少？
  - 3/1 ~ 9/1 ➔ $31\times4+30\times2 = 184$ （ **[3/1, 9/1)** ）
  - 3/1 ~ 7/3 ➔ $31\times2+30\times2+2 = 124$ （ **[3/1, 7/3)** ）

  孳息： $124/184 \times 4\% = 2.6957\ \%$

6

Example：30 / 360

- 假設每個月 30 天，每年 360 天。
- 假設某公司的付息債券，使用 30/360方式計算天數。假設票面利率 8%，每半年支息一次，於 3/1 與 9/1 發放。請問在 3/1 至 7/3 日之間，此債券孳息多少？
  - 3/1 ~ 9/1 ➔ $30 \times 6 = 180$ （ **[3/1, 9/1)** ）
  - 3/1 ~ 7/3 ➔ $30 \times 4 + 2 = 122$ （ **[3/1, 7/3)** ）

  孳息： $122/180 \times 4\% = 2.7111\ \%$

7

Example：Actual / 360

- 孳息用實際天數計算，每年假設 360 天。
- 假設投資年息 8% 的貨幣市場商品：
  - 投資90天，孳息：$90/360 \times 8\% = 2\%$
  - 投資一年，孳息：$365/360 \times 8\% = 8.028\%$

8

國庫券 (Treasury Bills)

- 由聯邦政府發行的一年以下債券。
- 可以分為三種：
  - 91 days, 182 days, 52-weeks.
  - 前二者，每週發行；後者，每月發行。有時會額外發行。
  - 星期一進行拍賣，於1:30 p.m. 停止出價。
  - 星期四交割。
  - 最小交易面額 $10,000，每增加單位 $5,000。

國庫券的報價 (Quotations for Treasury Bills)

- 國庫券一般是以貼現率 (Discount Rate) 報價。
- 國庫券的天數計算方式為：Actual/360。
- 概念上：假設某一年期國庫券到期支付$100，他的報價 6，表示期初售價 $94元，$6 是這一年的利息。
- 假設面額 $100，n 實際持有天數，Y 是國庫券的現金價格 (Cash Price)，P 是國庫券的報價 (Quoted Price)，則 Y 與 P 的關係式如下：

$$Y = 100 - P \times (n / 360)$$

國庫券的報價 (Quotations for Treasury Bills)

- 假設某 91-day 的國庫券，報價 8，則現金價格為：

$$Y = 100 - 8 \times (91/360)$$
$$= 100 - 2.0222 = 97.978$$

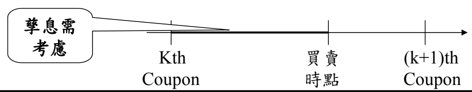
- Quoted Price 亦可以視為年化的貼現率，但不可以視為投資國庫券的報酬率。報酬率是收益除以成本：

$2.0222/97.978 \times 365/91 = 0.0828$ (每 91 天複利一次）。

政府公債的報價 (Quotations for Treasury Bonds)

- 美國政府公債的天數計算方式：Actual/Actual
- 美國政府公債以面額 $100 報價，計價單位為1/32。
  - Quoted Price = 90-05 ，表示每面額 $100 的債券，報價為 90 + 5/32 = $90.15625.
- 報價為**除息報價**，現金交割價格需再加上**孳息**。
  - Quoted Price = Clean Price
  - Cash Price = Dirty Price

Cash Price = Quoted Price + Accrued Interest Since Last Coupon Date



政府公債的報價 (Quotations for Treasury Bonds)

- 某公債每年 1/10 與7/10支付利息。票面利息11%。假設此公債在2003/3/5的報價為95-16，則此債券的現金交割價為何？
  - 1/10 ~ 7/10 付息期間天數: 22+28+31+30+31+30+9 =181
  - 1/10 ~ 3/5 孳息期間天數：22+28+4 =54
  - 報價：95-16 = 95+16/32 =95.5
  - 孳息：100 × 5.5% × 54/181 = 1.64
  - 每面額 $100 的交割價：95.5+1.64 = $97.14
- 面額 $100,000 的債券，售價為 $97,140

政府公債期貨 (Treasury Bonds Futures)

- 政府公債期貨為交易熱絡的長期利率期貨，在 CBOT 交易。
- 到期時，用來交割的政府公債必須符合兩個條件：
  - 以交割期間的第一天為基準，該債券存續期間必須大於 15 年。
  - 以交割期間的第一天為基準，該債券不能於 15 年內被提早贖回。

政府公債期貨 (Treasury Bonds Futures)

- 因此可以用來交割的債券不唯一，短部位投資人於交割期間，可以選擇任一符合標準的政府公債進行交割。
- 可交割期間為整個交割（到期）月份。
- 交割（到期）月份: 3, 6, 9, 12。
- 一口政府公債期貨合約 $100,000。

政府公債期貨報價

- 與政府公債報價方式相同。
  - 110-03 = 110 + 3/32
  - 假設某合約面額為 $100,000，當期貨價格變動 $1，則該契約價格變動 $1000。
    100,000 ÷ 100 × 1 = $1,000.

Interest Rate Futures Quotation

Interest Rate Futures

Treasury Bonds (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

March	112-05	112-07	111-27	**112-04**	-1	777,963
June	112-04	112-04	111-27	**112-02**	-1	7,450

Treasury Notes (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

March	107-280	107-295	107-215	**107-260**	-2.0	2,296,674
June	107-260	107-270	107-240	**107-270**	-2.0	38,131

5 Yr. Treasury Notes (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

March	105-090	105-100	105-045	**105-075**	-2.0	1,425,917

2 Yr. Treasury Notes (CBT)-$200,000; pts 32nds of 100%

March	102-042	102-042	102-015	**102-025**	-1.7	770,033

30 Day Federal Funds (CBT)-$5,000,000; 100 - daily avg.

Jan	94.750	94.760	94.750	**94.755**	...	84,247
Feb	94.755	94.760	94.755	**94.760**	...	120,416

1 Month Libor (CME)-$3,000,000; pts of 100%

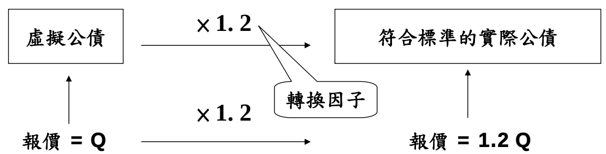
Jan	94.6775	94.6800	94.6775	**94.6775**	-.0025	23,569
Feb	94.6775	94.6825	94.6775	**94.6825**	.0050	16,150

Eurodollar (CME)-$1,000,000; pts of 100%

Jan	94.6375	94.6450	94.6375	**94.6425**	...	42,487
June	94.8250	94.8300	94.7750	**94.7900**	-.0400	1,414,973
Sept	95.0000	95.0000	94.9400	**94.9550**	-.0500	1,346,082
Dec	95.1300	95.1300	95.0700	**95.0900**	-.0450	1,316,779

轉換因子 (Conversion Factors)

- 由於公債期貨的標的債券不唯一，因此無法對期貨價格進行報價。因此，建構一虛擬的政府公債作為期貨的標的公債，以進行報價，再透過此虛擬的公債與其他符合標準的公債的價格關係（轉換因子），求出實際符合標準的公債期貨的價格。



轉換因子 (Conversion Factors)

- 假設某債券期貨的報價為 90-00，而短部位投資人欲進行交割的債券轉換因子為 1.38，而該債券的孳息為 $3 ，則實際進行交割的債券的現金交割價為：

$$90 \times 1.38 + 3 = \$127.2$$

假設短部位投資人進行交割的債券面額為 $100,000，則實際收入為： $127,200

Treasury Note Futures & 5yr Treasury Notes Futures

- Treasury Note Futures 與 5yr Treasury Notes Futures 交易也非常熱絡。
- Treasury Note Futures 的可交割債券必須存續期間 6.5 ~ 10 年。
- 5yr Treasury Notes Futures 的可交割債券必須存續期間 4 ~ 5 年。
- Treasury Note Futures 與 5yr Treasury Notes Futures 的交割方式與 Treasury Bonds Futures 相似，因此本章僅介紹 Treasury Bonds Futures 的交割方式。

求算轉換因子

- 求算轉換因子時，假設每半年複利一次的折現率為 6%。
- 假設虛擬債券的票面利率為 6%。因此，無論虛擬債券的到期日多長，它在期初的價格為 \$100。
  - Ex. : 1年到期的虛擬債券，期初價格：

    3/1.03 + 3/ (1.03)^2 +100 / (1.03)^2 =100
- 交割債券的到期日，會以無條件捨去的方式，調整成三個月的倍數。
  - 存續期間 20年又 2 個月 ➔ 存續期間調整為 20年
  - 存續期間 20年又 4 個月 ➔ 存續期間調整為 20年 又 3 個月

範例一：求算轉換因子

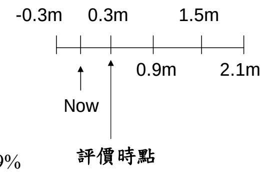
- 假設某政府公債的存續期間為 20年又2個月，票面利率10%，其轉換因子為1.4623。
  - 調整存續期間為20年。
  - $$\sum_{i=1}^{40} \frac{5}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{40}} = \$146.23$$

    每半年複利一次的折現率為 6%
  - **轉換因子 = 146.23/100**

    = 1.4623

範例二：求算轉換因子

- 假設某政府公債的存續期間為 20 年又 4 個月，票面利率8%，其轉換因子為何？
  - 調整存續期間為 20 年又 3 個月。
  - $$4+\sum_{i=1}^{40} \frac{4}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{40}} = \$125.83$$



  - 尚須往前折現 3 個月，3個月折現率 R：

    $1.03 = (1+R)^2$ ➔ $R = (1.03)^{0.5} - 1 = 1.4889\%$
  - 今日含息價：125.83 / 1.014889 = \$ 123.99 (Dirty Price)
  - 扣除孳息 \$2 (= 4 × 0.5)，此債券價格： \$121.99 (Clean Price)
  - **轉換因子：1.2199**

以最便宜的債券交割 (Cheapest-to-Delivery Bond）

- 由於可供交割的債券不唯一，因此**短部位**投資人會選擇對自己最有利的債券交割。
- **想法**：短部位於市場上購買一符合標準的公債，出售予長部位。因此，選擇『最便宜』的債券即是選擇『成本最低』的債券。

以最便宜的債券交割 (Cheapest-to-Delivery Bond）

- 出售價格：
  - **(Quoted futures price × Conversion factor) + Accrued int.**
- 購買成本：
  - **Quoted bond price + Accrued int.**
- 最便宜的債券為：

Minimize (成本 - 售價)

25

Example

- Assume the current futures price is 93-16. The cost of delivering each of the bonds is as follows:
  - Bond 1 : 99.5 – (93.5 x1.0382) = $2.69
  - Bond 2 : 143.5 – (93.5 x1.5188) = $1.87
  - Bond 3 : 119.75 – (93.5 x1.2615) = $2.12
- The cheapest-to-delivery bond is Bond 2.

Deliverable Bond	Quoted Bond Price	Conversion Factor
1	99.5	1.0382
2	143.5	1.5188
3	119.75	1.2615

26

外卡交易策略 (Wild Card Play)

- 公債期貨每日交易停止時間下午 2:00。
- 公債每日交易停止時間下午 4:00。
- 短部位投資人在交割期間內，每日最晚遞送交割通知單的時間為下午 8:00。一旦送出，結算價便是當日的公債結算價格 。
- 因此，交易期間，每日下午 2 點，期貨價格已固定。若 2 點後，債券價格下跌，則短部位投資人可以在債券市場買入債券，並送出交割通知單，如此可以獲利。此策略稱為外卡交易策略。

27

債券期貨價格的決定

- 債券期貨價格的決定不易，因為包含兩項不確定的因素：
  - 交割日期
  - 交割債券
- 假設此兩不定因素可以確定，即交割債券確定，且交割日期在 T，則債券期貨的現金交割價為：

$$F = (S-I) \times \exp(rT)$$

  - F：債券期貨的現金交割價 (Cash Price)。
  - S：債券的現金交割價 。
  - I：期貨契約存續期間債券的利息收入現值。
  - r： 無風險利率。

28

Example 6.2: (1)

Calculation of Treasury Bond Futures Price

- 假設某債券期貨的最便宜交割債券的今日報價 \$120，票面利率 12%，轉換因子 1.4，無風險利率 10%，假設此債券期貨的交割日期在 270 (=0.7397y) 日後。
- The **cash price of the bond**:

  $120 + 60/(60+122) \times 6 = \$121.978$

- The present value of a coupon \$6 received after 122 days (0.3342y) is: $6 \times \exp(-0.1 \times 0.3342) = \$5.803$

Coupon Payment		Current Time		Coupon Payment		Maturity of futures		Coupon Payment
	60 Days		122 Days		148 Days		35 Days	

Example 6.2:

Calculation of Treasury Bond Futures Price

- The **cash futures price** is:

  $(121.978-5.803) \times \exp(0.1 \times 0.7397) = \$125.094$

- The **quoted futures price if the contract were written on this bond** is:

  $125.094 - 6 \times 148/(148+35) = \$\ 120.242$

- The quoted futures price is: 120.242/1.4 =85.887

Coupon Payment		Current Time		Coupon Payment		Maturity of futures		Coupon Payment
	60 Days		122 Days		148 Days		35 Days	

Example 6.2:

Calculation of Treasury Bond Futures Price

- QP = Quoted price of a Bond traded, denoted by B.
- CP = Cash Price of B.
- CF = Cash Price of the futures price on B.
- QF = Quoted Price of the futures price on B.
- F = Quoted Price of the treasury bond futures price.

  QP ➔ CP ➔ CF ➔ QF ➔ F

- **The quoted futures price of treasury bonds is F rather than CF and QF.**

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 在美國境外的美元存款，稱為歐洲美元。
- 歐洲美元存款利率是銀行將歐洲美元存入另一家銀行所獲得的利率，本質上與 LIBOR 利率相同。
- 在美國，三個月期的歐洲美元存款利率期貨，是交易最熱絡的利率期貨。其標的資產為三個月歐洲美元定期存單。
- 在 CME (Chicago Mercantile Exchange) 交易。

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 交易月份：
  - 每年的 3, 6, 9, 12 月份
  - 最近四個連續月份（非季月）
- 到期日最長到十年。例：在 2004，可以透過此契約鎖定 2014 的三個月歐洲美元存款利率。
- 到期日為交割月份的第三個星期三。

33

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 市場報價：
  - Q = 市場報價，為三個月定期存單的價格，以貼現的方式報價，**單位為 %**。
  - (100 – Q) %＝ R % 表示以每三個月複利一次的年化借/放款利率。
- 歐洲美元期貨的報價是針對定期存單，因此歐洲美元期貨的標的資產為定期存單。

34

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 歐洲美元期貨的報價是針對定期存單，因此歐洲美元期貨的標的資產為定期存單。
  - 假設市場報價 Q = 96%，表示該期貨契約允許長部位投資人於到期時，以每三個月複利一次的年利率 4 % (100% - 96%) 存款（以 96% 買入三個月期 $1 的定期存單)。
  - 假設市場報價 Q = 96%，表示該期貨契約允許短部位投資人於到期時，以每三個月複利一次的年利率 4% (100% - 96%) 借款（以 96% 賣出三個月期 $1 的定期存單)。

35

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 變動單位：0.0001 = 0.01% = 1 basis point (bp)
- 天數計算方式：Actual/360
- 一口 3 個月 (90-day) 歐洲美元存款利率期貨，可以讓投資人鎖定未來某一 3 個月期間，$ 1 million 的存款利率。
  - 長部位投資人，可以以契約約定的利率 R%，放（存）款 $1m 三個月（ R% = 100% – Q% ）。
  - 短部位投資人，可以以契約約定的利率 R%，借款 $1m 三個月 （R% = 100% - Q% ）。
- 使用現金交割。
- 報價 Q% 變動 1bp，利率 R% 反向變動1bp，契約價值變動 $25。

$$\$25 = 1{,}000{,}000 \times 0.25 \times 0.0001$$

36

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 舉例說明：假設市場報價 Q 從 97.12 上升至 97.23。
  - 報價變動：11bp = 97.23% - 97.12%
  - 長部位投資人： 獲利 $275 = 11bp × 25
  - 短部位投資人： 損失 $275 = 11bp × 25
- 長部位投資人 = 買入存單 = 存款 (賺取利息)
  - 報價 Q 上升，可以透過期貨以較低的價格買入，獲利。
  - 市場利息下降，透過期貨，可以較高的利率放（存）款，獲利。
- 短部位投資人 = 賣出存單 = 借款 (付出利息)
  - 報價 Q 下降，可以透過期貨以較高的價格賣出，獲利。
  - 市場利息上升，透過期貨，可以較低的利率借款，獲利。

37

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 與一般期貨契約相同，歐洲美元期貨契約到期前要結束部位，只須建立相反的期貨部位。
- 交易所定義用來衡量契約價值的公式：

$$1{,}000{,}000 \times [100\% - 0.25 \times (100\% - Q\%)]$$
$$= 10{,}000 \times [100 - 0.25 \times (100 - Q)]$$

- 長部位投資人：契約價值上升，獲利。
- 短部位投資人 ：契約價值下降，獲利。

38

歐洲美元期貨(Eurodollar Futures)

- 期貨契約每日的收益，來自契約價值的變化。
  - Date 1: $P1 = 10{,}000 \times [100 - 0.25 \times (100 – Q1)]$
  - Date 2: $P2 = 10{,}000 \times [100 - 0.25 \times (100 – Q2)]$
  - Date 2 長部位的收益：$10{,}000 \times 0.25 \times (Q2-Q1)$
  - Date 2 短部位的收益：$10{,}000 \times 0.25 \times (Q1-Q2)$
- 假設 Q% 上升 1bp (或 Q 變動 0.01):
  - 期貨長部位：+ $25
  - 期貨短部位：- $25
  - $25 = 10,000 × 0.25 × 0.01
- 假設契約持有至到期日，則每日結算部位損益，直到到期日最後一次結算，然後結束部位。

39

Example (1)

- 2007/1/8，某投資人將在 2007/6/20 貸放 $5m 三個月，擔心到時利率下降，因此想鎖定放款利率。假設 2007/1/8 的三個月歐洲美元期貨報價為：94.79。
- 避險策略：投資人進入 5 口期貨長部位，以鎖定存款利率。
- 在 2007/6/20，該期貨到期，市場利率為 4% (= R)，對應市場的報價為 96 (= Q)。 因此該投資人期貨收益為：

40

Example (2)

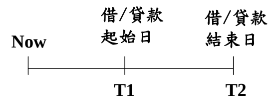
- 2007/6/20 到期時，共收入：$65,125
  - 利率 4% 的存款收入：$50,000 =5,000,000 × 0.25 × 0.04
  - 期貨部位收入： $15125
- 本金 $5,000,000，利息收入 $65,125，表示存款利率 5.21%，此即期貨鎖定的存款利率 (100 - 94.79)%。

$ 65,125 =5,000,000 × 0.25 × 0.0521

41

歐洲美元期貨 vs. 遠期利率協定

- 歐洲美元期貨與遠期利率協定皆可鎖定未來某一區間的存 / 放款利率。
  - 歐洲美元期貨 ➔ 期貨利率 (Futures Interest Rate)
  - 遠期利率協定 ➔ 遠期利率 (Forward Interest Rate)
- **歐洲美元期貨**每日結算，且最後一次結算在 T1。
- **遠期利率協定**到期一次結算，結算日在T2，但實務上會折現至T1支付損益。



42

遠期利率 vs. 期貨利率

- 當到期日小於1年時，遠期利率與期貨利率幾乎相等。
- 當到期日大於一年時，期貨利率大於遠期利率。
- 市場分析師常用的凸性調整 (Convexity Adjustment) 近似公式：

$$\text{Forward Rate} = \text{Futures Rate} - \frac{1}{2}\sigma^2 T_1 T_2$$

  - T_1 : Time to maturity of the futures contract.
  - T_2 : Time to maturity of the rate underlying the futures contracts.
  - σ 表示一年期短期利率變動的標準差。
  - 公式裡的遠期與期貨利率皆是連續複利。

43

Example : Convexity Adjustment

- 假設一年期利率變動的標準差為 1.2 %，八年期的 3 個月歐洲美元期貨利率報價為 94。因此，T1 = 8, T2 = 8.25。

Convexity Adjustment =

$$(1/2) \times (0.012)^{\wedge 2} \times 8 \times 8.25 = 0.00475$$

44

Example : Convexity Adjustment

- Futures interest rate = 6% per annum on an actual/360 basis with quarterly compounding.
- This equals 6 × 365/360 = 6.083% per annum on an actual/365 basis with quarterly compounding
- This equals 6.038% per annum with continuous compounding. $6.038\% = 4\ln(1+(6.083\%/4))$
- The forward rate is 6.038% - 0.475 % = 5.563% per annum with continuous compounding.

45

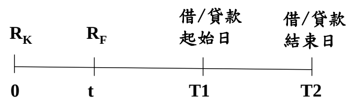
為何期貨利率大於遠期利率？

- 期貨利率大於遠期利率！！
- 原因有二：
  - 利率期貨逐日結算損益，遠期利率協定到期一次結算。
  - 期貨是在契約到期時 T1 結算，遠期合約是在 T2 結算。

46

為何期貨利率大於遠期利率？

- 假設某人欲使用『利率契約』規避 [T1, T2] 期間的借款成本。
- 任意時間 t，該契約價值為：$(R_F - R_K)\times\ldots$
  - 時間 t 所觀察的遠期利率：R_F
  - 契約約定的借款利率：R_K



47

原因一：

- 利率期貨逐日結算損益，遠期利率協定到期一次結算。
  - 當利率上升，$R_F\uparrow$，該契約獲利，且可以較高的利率存款。
  - 當利率下降，$R_F\downarrow$，該契約損失，但可以較低的利率借款回補保證金。
- 因此，以『期貨契約』借款較『遠期利率協定』佳，故以期貨借款者較以遠期利率協定借款者增加，因此期貨利率大於遠期利率。

48

原因二：

- 期貨是在契約到期時 T1 結算，遠期合約是在 T2 結算。
  - 利率上升，R_F ↑，有收益（ $R_F - R_K$ ）
    - 遠期合約在 T2 得到，折現至 T1，因為 R_F ↑，所以折現值降低，不利。

49

存續期間 （Duration）

- 存續期間是指債券持有人收到現金流量所需等待的平均時間。
- 假設債券在時間 t_i 有現金流入 c_i，債券價格B，債券收益率 y（連續複利），則：
  - 債券價格 $B=\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i}$

    Duration $D \triangleq \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B}\right]$
- 存續期間是收到現金流量的平均時間，以現金流量現值除以債券價格為權數。

50

存續期間的性質 (1)

債券價格 $B=\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i}$ 對收益率 y 微分，

可以得到： $\frac{\Delta B}{\Delta y}=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i}\right)(-t_i)$ 。

同除以債券價格 B，可得

$$\frac{\Delta B}{B}=-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{B}\right)\Delta y=-D\Delta y$$

51

存續期間的性質 (2)

$$\frac{\Delta B}{B}=-D\Delta y$$

$$\Delta B=-BD\Delta y$$

- 存續時間可以描述債券價格變動百分比與債券收益率變動的近似關係。
- 債券價格變動百分比與債券收益率呈反向變動。

52

Calculation of Duration

Suppose the yield rate on the bond is 12% per annum with continuous compounding.

Time (y) Ti	Cash flow Ci	Present Value Pi =Ci × exp(-Ti × y)	Weight Wi = Pi/P	Time × Weight Ti × Wi
T1 = 0.5	5	4.709	0.050	0.025
T2 = 1	5	4.435	0.047	0.047
T3 = 1.5	5	4.176	0.044	0.066
T4 = 2	5	3.933	0.042	0.083
T5 = 2.5	5	3.704	0.039	0.098
T6 = 3	5	73.256	0.778	2.333
Total	130	P = 94.213	1	**D =2.653**

53

Example

- 由上表可知， B = 94.213，D = 2.653，因此：

$$\Delta B = -94.213 \times 2.653 \times \Delta y = -249.95 \times \Delta y$$

- 當 Δ y = + 10bp (0.1%)，Δ B = -0.24995 = -0.25

- 當 y = 12% ➔ y = 12.1%

$$5\times\exp(-0.121\times0.5)+5\times\exp(-0.121\times1)+5\times\exp(-0.121\times1.5)$$
$$+5\times\exp(-0.121\times2)+5\times\exp(-0.121\times2.5)+105\times\exp(-0.121\times3)$$
$$=93.963$$

Δ B = 93.963 – 94.213 = - 0.25

54

修改後存續期間 (Modified Duration)

- 先前，債券收益率 y 是假設為連續複利，若改為每年複利 m 次，則存續期間的公式修改為：

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i},$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i}}{B} = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i}}{B}$$

修改後存續期間 $D^* = \dfrac{D}{1+\frac{y}{m}}$

55

推導過程

$B = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i}$，對收益率 y 微分，可以得到

$$\frac{\Delta B}{\Delta y} = -\sum_{i=1}^{n} t_i c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i-1} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i}}{1+\frac{y}{m}}$$

同除以債券價格 B並移項，可得

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} t_i c_i \left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt_i}}{B\left(1+\frac{y}{m}\right)} \Delta y = -\frac{D}{1+\frac{y}{m}} \Delta y$$

$$= -D^* \Delta y$$

D^*稱爲修改後存續期間（Modified Duration）。

56

修改後存續期間的性質

$$\Delta B = -BD^{*}\Delta y$$

$$\frac{\Delta B}{B} = -D^{*}\Delta y,\ \text{y 每年複利 m 次。}$$

- 修改後存續時間可以描述債券價格變動百分比與債券收益率變動的近似關係。
- 債券價格變動百分比與債券收益率呈反相變動。

Example

- 某債券價格 94.213，存續期間 2.653，半年複利一次的收益率 y = 12.3673%。則修改後的存續期間 D* 為：

  D* = 2.653 / (1 + 0.123673/2) = 2.499

  因此，當（半年複利一次）收益率增 10bps，債券價格下降：

  ΔB = - 94.213 × 2.499 × 0.001 = - 0.235

  債券價格成為：93.978 = 94.213 - 0.235

Dollar Duration: D**

- Dollar Duration D** is defined by

  D** = D × B

- ΔB = - D** × Δy
- Dollar Duration 描述債券收益率變動 1%，債券價格變動多少（＄）的近似關係。

債券投資組合的 Duration

假設 P 是由 n 檔債券所組成的債券投資組合，

定義如下：$P = \sum_{i=1}^{n} B_i$

假設債券 B_i 的 Duration 爲 D_i ，

則債券投資組合的 Duration D_P 定義爲：

$$D_P = \sum_{i=1}^{n} w_i\ D_i, \text{其中}\ w_i = \frac{B_i}{\sum_{j=1}^{n} B_j}\ \text{。}$$

債券投資組合的 Duration

- D_P 用來描述：當債券投資組合裡的所有債券，其債券收益率同時變動 Δy，債券投資組合價值變動的 %。

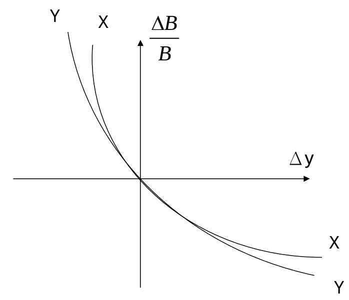
$$\frac{\Delta P}{P} = -D_P\ \Delta y$$

- 上式引含了一個假設，即不同到期日的債券收益率變動量相等， $\Delta y_i = \Delta y$ 。
- 當債券到期日分佈很廣時，上述假設僅在Zero Curve 平行移動時成立。

61

凸性 （Convexity）

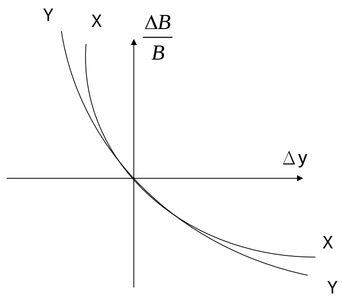
- Duration 僅適合在 Δy 變動幅度很小時。
- 債券投資組合 X 與Y一開始有相同的Duration，因此當Δy 變動幅度很小時，兩投資組合價值變化差距不大。



62

凸性 （Convexity）

- 當Δy 變化很大時，兩者價值變動就有很大的差距，因為投資組合X 較凸，所以變化較投資組合Y大。
- 債券投資組合避險時，除了考慮仍須 Duration，仍須考慮 Convexity。



63

資產與負債的投資組合避險 (Hedging Portfolios of Assets and Liabilities)

- 金融機構為了規避利率風險，必須調整資產的平均 Duration 與負債的平均 Duration 相同。此法稱為存續期間配對 (Duration Matching) 或投資組合免疫 (Portfolio Immunization)。
  - 資產：Long positions in bonds
  - 負債：Short positions in bonds
- 當 Yield curve 平行移動 + 1bp ，資產負債變動抵銷。
  - 資產下降
  - 負債減少

64

問題

- 上述方法是在債券收益率平行移動的假設下討論，然而債券收益率常常不是平行移動，因此避險方法仍可能造成損失。
  - 短期利率比長期利率較易波動。
  - 短期利率與長期利率並非一定正相關。
    - 可能長期利率上升，短期利率下降。
- 更深入的投資組合管理課程。

65

在存續期間架構下，以利率期貨規避利率風險

- Notations：
  - F: 利率期貨合約的價值（標的資產的期貨價值）
  - Df: 在期貨到期時，期貨標的資產的 Duration。
  - P: 投資組合在避險時點的遠期價格，通常假設與今日價格相同。
  - Dp: 在避險時點，投資組合的 Duration
- 以下討論假設 Yield Curve 以平行移動。

66

在存續期間架構下，以利率期貨規避利率風險

- 假設債券收益率平行變動 Δy，則：
  - $\Delta P = -P \times Dp \times \Delta y$
  - $\Delta F = -F \times Df \times \Delta y$
- Duration-based hedge ratio or price sensitivity hedge ratio is $\mathbf{N^* = (P \times Dp) / (F \times Df)}$

67

在存續期間架構下，以利率期貨規避利率風險

- N*是避險 P，需要的期貨單位數。
  - $\Delta P = (\Delta P / \Delta F) \times \Delta F \Rightarrow \Delta P / \Delta F = N^*$
- It makes the duration of the entire position zero, i.e. duration of ($P + N^* \times F$) is zero.

68

注意事項

- 若使用債券期貨避險，則必須先預測哪一檔債券可能會是交割債券（Cheapest-to-Deliver Bond），並以此債券算 Duration。若之後發覺可能交割的債券改變，則必須調整避險部位。
- 規避中長期利率風險，使用中期與長期公債期貨（Treasury Bond and Treasury Note Futures Contracts ）。
- 規避短期利率風險，使用歐洲美元期貨 (Eurodollar Futures Contracts)。

69

注意事項

- 利率下降，期貨價格上升。利率上升，期貨價格下降。
- 利率期貨 長 / 短 部位的選擇：
  - 某公司利率下降時會損失，須進入利率期貨長部位。
  - 某公司利率上升時會損失，須進入利率期貨短部位。

70

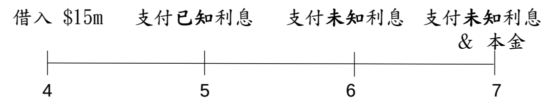
債券投資組合的避險
(Hedging a Bond Portfolio)

- 8/2，某基金經理人管理 $10m 債券投資組合，想規避未來3個月的利率風險。假設該債券投資組合的 Duration = 6.8 年。
- 債券經理人欲使用公債期貨規避利率風險。假設12月到期的期貨報價 93-02。由市場觀察得知，可能交割債券在到期的 Duration = 9.2年。
- 最適避險口數： $N^* = (10{,}000{,}000 \times 6.8/93062.5 \times 9.2) = 79.42$
  因此，應該 進入債券期貨短部位 79 口。
- 假設，8/2 ~ 11/2 之間，利率快速下降：
  - 債券投資組合部位價值上升至 $10,450,000
  - 期貨報價為 98-16，因此期貨損失 79 × (98500 - 93062) = $429,562.5
  - Net Change: 450,000 - 429,562.5 = $20,437.5

71

浮動利率借款的避險
(Hedging a Floating-Rate Loan)

- 4 月，某公司於 借入 3 個月期的浮動利率借款 $15m ，利息每個月底支付，利率為當月的 1-m LIBOR +1%。
- 假設今日觀察到的1-m LIBOR 為 8%，則第一個月適用的利率確定為 9%，無須進行規避利率風險。



72

浮動利率借款的避險
(Hedging a Floating-Rate Loan)

- 第 2 個月適用的利率在下個月（5月）才能得知，因此欲規避利率風險。
  - 借款的 Duration = 1 month = 0.0833y
  - 假設 June Eurodollar Futures contract 今日報價為 91.88。因此，合約價格為：10,000 × [100-0.25×(100-91.88)] =$979,700
  - Eurodollar Futures contract 的標的是三個月歐洲美元定期存款，所以
    Duration =3 month = 0.25y
  - 必須進入期貨**短部位**進行避險，最適避險單位為：
    $N^* = (15{,}000{,}000 \times 0.0833) / (979{,}700 \times 0.25) = 5.1$
  - 進入 5 口期貨短部為進行避險。

73

浮動利率借款的避險
(Hedging a Floating-Rate Loan)

- 5/29, 1-m LIBOR 為 8.8%，6月期貨報價 91.12。
  - 公司在期貨部位的收益為：
    $5 \times (979{,}700 - 977{,}800) = \$9{,}500$

  or $5 \times 25 \times (91.88 - 91.12) = \$9{,}500$
  - 因為利率從 8 % 增加至 8.8 %，公司利息支出增加：
    $15{,}000{,}000 \times 0.008 \div 12 = \$10{,}000$
- 避險後，利率上升造成的利息增加僅：$500。

74

浮動利率借款的避險
(Hedging a Floating-Rate Loan)

- 第 3 個月適用的利率在下個月（6月）才能得知，因此欲規避利率風險。
  - 借款的 Duration = 1 month = 0.0833 y
  - 假設 September Eurodollar Futures contract 今日報價為 91.44。因此，合約價格為：10,000 × [100-0.25×(100-91.44)] =$978,600
  - Eurodollar Futures contract 的標的是三個月歐洲美元定期存款，所以
    Duration = 3 month = 0.25y
  - 必須進入期貨**短部位**進行避險，最適避險單位為：
    $N^* = (15{,}000{,}000 \times 0.0833) / (978{,}600 \times 0.25) = 5.11$
  - 進入 5 口期貨短部為進行避險。

75

浮動利率借款的避險
(Hedging a Floating-Rate Loan)

- 6/29, 1-m LIBOR 為 9.4%，9月期貨報價 90.16。
  - 公司在期貨部位的收益為：
    $5 \times (978{,}600 - 975{,}400) = \$16{,}000$

  or $5 \times 25 \times (91.44 - 90.16) = \$16{,}000$
  - 因為利率從 8 % 增加至 9.4 %，公司利息支出增加：
    $15{,}000{,}000 \times 0.014 \div 12 = \$17{,}500$
- 避險後，利率上升造成的利息增加僅：$1500。

76

Exercise

- 2,7,8,9,10,11,12,14,15,17,18,27

77