Ch11 兩母體的假設檢定與估計

Two-sample Tests of Hypothesis and Confidence Interval

1

Comparing two populations – Some Examples

- Is there a difference in the mean number of defects produced on the day and the afternoon shifts at Kimble Products?
- Is there a difference in the mean number of days absent between young workers (under 21 years of age) and older workers (more than 60 years of age) in the fast-food industry?
- Is there an increase in the production rate if music is piped into the production area?
- 兩種產業獲利能力的差異
- 兩班成績的差異

2

兩母體的假設檢定與估計

- 兩獨立母體平均數的統計推論：大樣本
- 兩獨立母體平均數的統計推論：小樣本
- 成對母體平均數差的統計推論
- 兩個母體比例差的統計推論

3

Notations

μ_k: 母體 k 的平均數

σ_k: 母體k的變異數

n_k :母體k的樣本數

$\bar{X}_k$:母體k抽出樣本的平均數

4

兩獨立母體平均數的統計推論：

大 樣 本: $n_1 \geqq 30$；$n_2 \geqq 30$

The Sum of Two Independent Normal Dist.

If $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and $X_2 \sim N(\mu_1, \sigma_2^2)$ are indep., then

$$Y = X_1 \pm X_2 \sim N(\mu_{X_1 \pm X_2}, \sigma^2_{X_1 \pm X_2}) = N(\mu_1 \pm \mu_1,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Thus, if $\overline{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ and $\overline{X}_2 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ are indep., then

$$Y = \overline{X}_1 \pm \overline{X}_2 \sim N(\mu_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}, \sigma^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}) = N(\mu_1 \pm \mu_1,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$\sigma^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}$ 的估計式 (1)

當兩獨立母體變異數未知時，可以使用樣本變異數估計 $\sigma^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}$。

$\sigma^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}$ 的估計式為 $S^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}$，公式為：

$$S^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2} = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2},$$

其中 $S_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} \left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)^2}{n_1 - 1}$，$S_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2} \left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)^2}{n_2 - 1}$

$\sigma^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2}$ 的估計式 (2)

當兩獨立母體變異數未知，但已知兩變異數相等 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，

此時需綜合兩樣本資料共同估計 σ^2 ，σ^2 的估計式為 S_P^2 ，

$$S_P^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} ,$$

其中 $S_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} \left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)^2}{n_1 - 1}$，$S_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2} \left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)^2}{n_2 - 1}$ ，

此時 $S^2_{\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2} = \dfrac{S_P^2}{n_1} + \dfrac{S_P^2}{n_2}$ 。

兩獨立母體 $\mu 1-\mu 2$ 的(1-α) C.I.

(1) 兩母體變異數已知:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2},\ \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$$

(2) 兩母體變異數未知:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2},\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)}$$

(3) 兩母體變異數未知，但已知相等:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2},\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_P^2/n_1)+(S_P^2/n_2)}$$

Ex. 11.1 (1)

- 隨機抽取北市 1295 輛計程車平均驗車時間為 25 分鐘標準差為 7.7 分鐘，1574 輛北縣計程車平均驗車時間為 20 分鐘標準差為 8.3 分鐘，問在 99% 的信賴水準下，北市與北縣的平均驗車時間差異的信賴區間為何？

Ex. 11.1 (2)

設μ_1爲北市的平均驗車時間，μ_2爲北縣的平均驗車時間

由題意知 $\bar{X}_1$=25 $\bar{X}_2$=20，$n_1=1295$ $n_2=1574$ S_1=7.7 S_2=8.3

則 $\sigma_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2}=\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\dfrac{7.7^2}{1295}+\dfrac{8.3^2}{1574}}=0.3$

可以得到信賴區爲 ：

$(\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2)\ \pm\ Z_{\alpha/2}S_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2}=(25\text{-}20)\pm 2.58\times 0.3=(4.225,\ 5.774)$

因此可知在 99% 的信賴水準下，μ_1 與 μ_2 的差距在 4.25 跟 5.774 之間。因此結論爲：

因 μ_1-μ_2> 0，所以北市的驗車時間較北縣的驗車時間長。

Ex. 11.2 (1)

根據以下的數據，企劃部能否得出支持店長雨季增加人手的決策？(信賴水準95%)

季節	雨季(3到5月)	乾季(10到12月)
樣本數	92	92
平均數	1815233	1789992
標準差	85313	106125

Ex. 11.2 (2)

設μ_1爲雨季時的每日平均營業額;

μ_2 爲乾季時的每日平均營業額

由題意知 $\bar{X}_1$=1815233, $\bar{X}_2$=189992, $n_1 = n_2 = 92$,

S_1=85313, S_2=106125

則 $S_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2} = \sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{85313^2}{92} + \dfrac{106125^2}{92}} = 14196$

可以得到信賴區爲: $(\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2}$

$= (1815233\text{-}1789992) \pm 1.96 \times 14196 = (-2583,\ 53065)$

C.I. 包含 0 (兩季並無顯著差異)，因此企劃部無法支持店長的要求

Ex. 11.3 (1)

- 根據以下的數據，店長是否可以反駁企劃部的調查結果？(信賴水準95%)

季節	雨季(3到5月)	乾季(10到12月)
樣本數	38	34
平均里程	852	445
標準差	231	162

Ex. 11.3 (2)

設μ_1爲雨季時外送機車的平均行駛里程

設μ_2爲乾季時外送機車的平均行駛里程

由題意知 $\bar{X}_1 = 852$, $\bar{X}_2$=445, $n_1 = 38$, $n_2 = 34$,

S_1=231, S_2=162

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(38-1)231^2 + (34-1)162^2}{38+34-2}} = 201.4$$

則 $S_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} = 201.4\sqrt{\dfrac{1}{38} + \dfrac{1}{34}} = 47.5$

Ex. 11.3 (3)

C.I. 爲 $(\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2} = (38\text{-}34) \pm 1.96 \times 47.5$

$= (313.9, 500.1)$

因此可知雨季的平均里程明顯高於乾季，

因此確可證明，企劃部應該支持店長增加

人手的需求。

兩獨立母體$\mu 1-\mu 2$的假設檢定

(1) 兩母體變異數已知:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\text{ - }(\mu_1\text{-}\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}},\quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$$

(2) 兩母體變異數未知:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\text{ - }(\mu_1\text{-}\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}},\quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)}$$

(3) 兩母體變異數未知，但已知相等:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\text{ - }(\mu_1\text{-}\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}},\quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{(S_P^2/n_1)+(S_P^2/n_2)}$$

17

Ex. 11.4 銀行存提款等待時間的差異? (1)

設台灣銀行宣稱他的客戶在各分行平均等待時間低於第一銀行。

今華通企管顧問公司從台灣銀行抽取 64 個客戶，發現平均等待時間爲 9.06 分鐘。

從第一銀行抽取 81 個客戶，發現平均等待時間爲 10.51 分鐘。

設兩母體標準差已知爲 σ_1=2.5 分，σ_2=3.5 分。

試在 α=0.01 下，檢定台灣銀行的宣稱是否爲真。

18

Ex. 11.4 銀行存提款等待時間的差異? (2)

令μ_1爲台灣銀行所有客戶的平均等待時間

μ_2爲第一銀行所有客戶的平均等待時間

由題意知 $\bar{X}_1$=9.06，σ_1=2.5，$\bar{X}_2$=10.51，σ_2=3.5

1.設立兩假設

H_0: μ_1-μ_2=0(兩銀行客戶平均等待時間沒有不同)

H_1: μ_1-μ_2<0(台灣銀行客戶平均等待時間低於第一銀行)

2.選擇檢定統計量

$n_1\geq 30$, $n_2\geq 30$爲大樣本，$\bar{X}_1$- $\bar{X}_2$的抽樣分配爲近似常態分配，且σ_1及σ_2爲已知。因此我們已Z分配來做假設檢定。

19

Ex. 11.4 銀行存提款等待時間的差異? (3)

3.決定拒絕域與接受域

因爲對立假設爲 <，故採左尾檢定。

而 α=0.01，Z 分配下的臨界值 Z = -2.33。

4.計算檢定統計量(或將檢定統計量的臨界值比較)

母體變異數已知，檢定統計量Z值爲:

$$\sigma_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{(2.5)^2}{64}+\frac{(3.5)^2}{81}}=0.4989$$

$$Z=\frac{(\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2)-(\mu_1\text{-}\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2}}=\frac{(9.06\text{-}10.51)\text{-}0}{0.4989}=-2.91$$

因爲左尾檢定，P值爲: P值=P(Z<-2.91)=0.0018

20

Ex. 11.4 銀行存提款等待時間的差異? (4)

5.下結論

因爲Z=-2.91小於臨界值-2.33，落於拒絕域，

或因 P值=0.0018<α=0.01，因此拒絕虛無假設。

故結論爲: 在α=0.01下，台灣銀行客戶平均等候時間低　於第一銀行，台灣銀行的宣稱屬實。

Ex. 11.5 兩機器性能差異的檢定 (兩母體變異數未知) (1)

- 設義美餅乾製造商有兩台機器同時生產每塊標準重量為 5 公克的餅乾，現自二台機器所生產的餅乾中各抽驗 100 塊，得平均重量及樣本標準差如表 13.4。試檢定二台機器重量是否相等

表13.4 兩台餅乾重量機器生產的

機器	平均重量	樣本標準差
1	5.08	0.21
2	4.91	0.35

Ex. 11.5 兩機器性能差異的檢定 (兩母體變異數未知) (2)

令 μ_1 爲機器 1 生產的餅乾的平均重量

μ_2 爲機器 2 生產的餅乾的平均重量

由題意知 n_1=100，$\overline{X}_1$=5.08，S_1=0.21

n_2=100，$\overline{X}_2$=4.91，S_2=0.35

1.設立兩假設

H_0: $\mu_1=\mu_2$ (兩台機器的產品的平均重量相等)

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$(兩台機器的產品的平均重量不相等)

2.選擇檢定統計量

$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$爲大樣本，$\overline{X}_1$- $\overline{X}_2$ 的抽樣分配爲近似常態分配。因此我們以 Z 分配來做假設檢定。

Ex. 11.5 兩機器性能差異的檢定 (兩母體變異數未知) (2)

3.選擇顯著水準及決定拒絕域與接受域 (行動法則或決策法則)

選擇 α=0.01。 因爲對立假設的符號爲 ≠，故採雙尾檢定。 而 α=0.01，故 $\frac{\alpha}{2}$=0.005，常態分配下的臨界值 Z 爲 -2.58 及 2.58。

Ex. 11.5 兩機器性能差異的檢定 (兩母體變異數未知) (4)

4.計算檢定統計量 (或將檢定統計量的臨界值比較)

母體變異數未知，檢定統計量Z值爲:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.21)^2}{100}+\frac{(0.35)^2}{100}} = 0.0408$$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{(5.08-4.91)-0}{0.0408} = 4.17$$

因爲雙尾檢定，P 值爲: P值 $= 2 \times P(Z>4.17) \approx 2 \times 0 = 0$

Ex. 11.5 兩機器性能差異的檢定 (兩母體變異數未知) (5)

5.下結論

因爲 Z=4.17 大於臨界值 2.58，落於拒絕域，或因 P值 $\approx 0 < \alpha = 0.01$，因此拒絕虛無假設。故結論爲：在$\alpha$=0.01下，，兩台機器生產的餅乾平均重量不相同。

兩獨立母體平均數的統計推論：

小 樣 本: $n_1 < 30$；$n_2 < 30$

兩獨立母體$\mu 1-\mu 2$的(1-α) C.I.

(1) 兩母體變異數已知:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}, \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$$

(2) 兩母體變異數未知:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{df,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}, \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{(S_1^2/n_1)+(S_2^2/n_2)}$$，

$$df = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2}(S_i^2/n_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{(S_i^2/n_i)^2}{n_i-1}}$$ (非整數時去小數)

(3) 兩母體變異數未知，但已知相等:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{df,\alpha/2}S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}, \quad S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{(S_P^2/n_1)+(S_P^2/n_2)}$$， $df=n_1+n_2-2$

Ex. 11.6 男女病患的門診醫療費用 (兩母體變異數未知但相等) (1)

- 在一家健保特約醫院調查得到表13.5的結果:

男、女病患的門診醫療費用的調查結果

	樣本數	樣本平均數	樣本標準差
男性病患	14	830	283
女性病患	15	748	275

- 假設男、女性病患的門診醫療費用的母體變異數相等。試估計男、女病患平均門診醫療費用差異的95%信賴區間。

Ex. 11.6 男女病患的門診醫療費用 (兩母體變異數未知但相等) (2)

令 μ_1 、μ_2 分別代表男、女性病患的平均門診醫療費用。

由題意知 n_1=14，$\bar{X}_1$=830元，S_1=283元

n_2=15，$\bar{X}_2$=748元，S_2=275元

首先計算 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的標準差:

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{13(283)^2+14(275)^2}{14+15-2}} = 279$$

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = 279\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{15}} = 104$$

Ex. 11.6 男女病患的門診醫療費用 (兩母體變異數未知但相等) (3)

因為是小樣本故以 t 分配來作區間估計。

α=0.05，故 $\frac{\alpha}{2}$=0.025，自由度為 27，查表 $t_{27,0.025}$ = 2.052。

可得 μ_1-μ_2 的 95% 信賴區間為: $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

$= (830-748) \pm 2.052 \times 104 = 82 \pm 213 = (-131 \sim 295)$

因此可知男、女病患平均門診醫療費用差異的 95% 信賴區間為 -131 ~ 295。因該區間包含 0 這一點，故知男、女病患平均門診醫療費用並無明顯差異。

Ex. 11.7 等多久才找到工作? (變異數未知) (1)

- 假設勞委會想深入了解摩擦性失業的情形 (工作轉換與失業長短的關係)，而進行隨機抽樣，結果得知，在民國92年間轉換工作的 25 位人員中，18 位工作經驗不到一年，7位有一年以上工作經驗。工作經驗不及一年者在找新工作前，在家中等待的期間平均7.2個月；有一年以上工作經驗的人員在家中等待的期間平均為 2.4 個月。失業期間的樣本標準差分別為 3.8 個月及1.6 個月。問兩種人員失業期間平均差異的 90% 信賴區間為何(設失業期間長短為常態分配)?

Ex. 11.7 等多久才找到工作? (變異數未知) (2)

令 μ_1 為工作經驗不到一年的平均失業期間

μ_2 為工作經驗一年以上的平均失業期間

$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$分別為相對應的樣本平均數。

由題意知 $n_1=18$　$\bar{X}_1=7.2$　$S_1=3.8$

$n_2=7$　$\bar{X}_2=2.4$　$S_2=1.6$

由於兩母體變異數未知，$\bar{X}_1-\bar{X}_2$的標準差:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{(3.8)^2}{18}+\frac{(1.6)^2}{7}}=1.081$$

33

Ex. 11.7 等多久才找到工作? (變異數未知) (3)

因為是小樣本故以t分配來做區間估計。

設 $\alpha=0.01$，自由度為:

$$\varphi=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{(3.8)^2}{18}+\frac{(1.6)^2}{7}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(3.8)^2}{18}\right)^2}{17}+\frac{\left(\frac{(1.6)^2}{7}\right)^2}{6}}$$

$$=\frac{1.3641}{0.0601}=22.70$$

保守取自由度 22，查表得 $t_{\varphi,\frac{\alpha}{2}}=t_{22,0.005}=1.717$。

34

Ex. 11.7 等多久才找到工作? (變異數未知) (4)

由上面的結果，可得兩種人員平均失業期間差的90%的信賴區間為:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{22,0.005}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=(7.2-2.4)\pm1.717\sqrt{\frac{3.8^2}{18}+\frac{1.6^2}{7}}$$

$$=4.8\pm1.717\times1.081=4.8\pm1.86$$

$$=2.94\sim6.66$$

35

Ex. 11.7 等多久才找到工作? (變異數未知) (5)

因此兩種人員平均失業期間差的 90% 的信賴區間 2.94 ~ 6.66 個月。由此可知，工作經驗長者較工作經驗短者的失業期間短約 2.94 ~ 6.66 個月。此結果是假設施業者除工作經驗外，其他條件大致相同，工作經驗差異對失業期間的影響，若失業者其他條件不同，則該估計區間，並不能作為預測之用。

36

兩獨立母體μ1－μ2 的假設檢定 (1)

當 σ_1^2 與 σ_2^2 已知，使用Z 分配：

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}},\quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{(\sigma_1^2/n_1)+(\sigma_2^2/n_2)}$$

37

兩獨立母體μ1－μ2 的假設檢定 (2)

當 σ_1^2 與 σ_2^2 未知，使用 t 分配，但依 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 與否，分兩種情形：

(1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$t_{df} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \theta}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}},\quad df = n_1 + n_2 - 2$$

(2) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$t_{df} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \theta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}},\quad df = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2}(S_i^2/n_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{(S_i^2/n_i)^2}{n_i - 1}}$$ (非整數時去小數)

38

Ex. 11.8 男女消費額有差異? (兩母體常態且變異數已知) (1)

設茄子咖哩管理部想知道男性客人的平均消費額是否大於女性客人的平均消費額。隨機抽取16位男性客人，得其消費額如下：

473 385 363 451 616 319 330 495

462 396 605 462 319 350 429 473

抽取25位女性客人，得其消費額如下：

319 165 363 330 473 225 264 363 242 132 385 462 429

275 220 363 462 352 341 286 264 253 385 418 429

而從過去的資料知，全部女性消費額的標準差爲100元；全部男性消費額的標準差爲150元。請在顯著水準α=0.025下，檢定男性客人的平均消費額是否大於女性客人的平均消費額(假設男女消費額爲常態分配)。

39

Ex. 11.8 男女消費額有差異? (兩母體常態且變異數已知) (1)

令 μ_1爲全部男性消費者的平均消費額

μ_2爲全部女性消費者的平均消費額

$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$分別爲相對應的樣本平均數。

由題意知 n_1=16　$\bar{X}_1$=433　σ_1=150

n_2=25　$\bar{X}_2$=328　σ_2=100

1.設立兩假設

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (男女性平均消費額沒有差異)

H_1: $\mu_1 > \mu_2$ (男性平均消費額高於女性)

2.選擇檢定統計量

$n_1<30$, $n_2<30$爲小樣本，而母體變異數已知，且$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$的抽樣分配爲常態分配，故我們以Z分配來做假設檢定。

40

Ex. 11.8 男女消費額有差異?(兩母體常態且變異數已知) (1)

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

因爲對立假設的符號爲>，故採右尾檢定。

而 α=0.025，常態分配下的臨界值Z爲1.96。

4.計算檢定統計量(或將檢定統計量的臨界值比較)

母體變異數已知，因:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(150)^2}{16}+\frac{(100)^2}{25}} = 42.5$$

故檢定統計量Z值爲:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{(433\text{-}328)\text{-}0}{42.5}=2.47$$

41

Ex. 11.8 男女消費額有差異?(兩母體常態且變異數已知) (1)

5.下結論

因爲檢定統計量 Z=2.47大於臨界值 1.96，落於拒絕域，因此 拒絕虛無假設。故結論爲:

『男性消費額高於女性消費額。』

因此茄子咖哩應該要加強對男性客人的宣傳服務。

42

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好?(母體常態變異數未知)（1）

- 隨機抽取15個人給予3 天訓練課程，另隨機抽取12個人給予2天訓練課程。訓練結果的資料如下：

兩個訓練課程的差異

訓練課程	受訓成績	平均數	標準差	樣本數
甲	86 80 82 74 82 77 77 83 75 78 72 81 72 73 74	77.3	4.42	15
乙	89 84 85 95 82 87 94 83 83 86 83 87	86.5	4.27	12

43

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好?(母體常態變異數未知)（2）

- 若假設訓練成績為常態分配，是問兩個訓練課程的平均成績是否相等?(請分別利用臨界值法、標準檢定量法及P值法)

44

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好?(母體常態變異數未知) (3)

令 μ_1 為甲課程的平均成績，μ_2 為乙課程的平均成績

由題意知 n_1=15　$\bar{X}_1$=73.73　S_1=4.42

　　n_2=12　$\bar{X}_2$=86.50　S_2=4.27

1.設立兩假設

H_0: $\mu_1 = \mu_2$(兩訓練課程的成績相同)

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$(兩訓練課程的成績不相同)

2.選擇檢定統計量

n_1< 30, n_2< 30 為小樣本，兩母體為常態但變異數未知，因此我們以 t 分配來做假設檢定。

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好?(母體常態變異數未知) (4)

3.選擇顯著水準及決定拒絕域與接受域 (行動法則或決策法則)

選擇 α=0.05。因為對立假設的符號為 ≠，故採雙尾檢定。

而 α=0.05，故 $\frac{\alpha}{2}$=0.025，自由度為：

$$\varphi = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{(4.42)^2}{15}+\frac{(4.27)^2}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(4.42)^2}{15}\right)^2}{14}+\frac{\left(\frac{(4.27)^2}{12}\right)^2}{11}} = \frac{7.96}{0.33} = 24.12$$

因此取t之自由度 24, 臨界值為 $-t_{24,0.025} = -2.064$ 與 $t_{24,0.025} = 2.064$。

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好?(母體常態變異數未知) (5)

又 $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$的臨界值：

$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)_L^* = (\mu_1-\mu_2) - t_{24,0.025} S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0-(2.064)(1.68) = -3.47$

$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)_U^* = (\mu_1-\mu_2) - t_{24,0.025} S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0+(2.064)(1.68) = 3.47$

其中：$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(4.42)^2}{15}+\frac{(4.27)^2}{12}} = 1.68$

因此決策法則為：

$-3.47 \le \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \le 3.47$，則接受 H_0

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < -3.47$ 或 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 3.47$，則拒絕 H_0

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好?(母體常態變異數未知) (6)

4. 計算檢定統計量

母體變異數未知，檢定統計量t值為：

$$t = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{(77.73\text{-}86.50)\text{-}0}{1.68} = -5.22$$

或計算 P 值。因為雙尾檢定，P 值為：

P 值=2×P(t_{24}<-5.22)

查 t 值表可得機率值 P(t_{24}<-2.797)=0.005，因此 P(t_{24}<-5.22)<0.005，故 P 值=2×P(t_{24}<-5.22) 小於 0.01

Ex. 11.9 哪個訓練課程比較好? (母體常態變異數未知) (7)

5.下結論

因爲 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$=77.73-86.50=-8.77, 小於臨界值 -3.47，因此拒絕 H_0。故結論爲:「甲乙兩訓練課程的成績有統計顯著不同，但由於兩個樣本的人員不同，因此該結果的差異是否來自課程或人員的差異解釋上是必須注意的。」

Ex. 11.10 兩個方案 (母體常態變異數未知但知相等) (1)

- 生產線1抽取25個工人，得其裝配零件A的時間如下：

  6.7 7.8 6.6 6.2 5.9 4.8 6.6 5.0 6.5 7.1 7.8 7.4 6.1 5.2 6.1 4.5 7.5 6.2 6.0 5.0 7.3 7.0 6.4 5.9 4.4

  從生產線2抽取25個工人，得其裝配零件A的時間如下：

  5.8 7.6 6.0 6.4 5.3 5.5 7.9 4.8 7.0 6.5 4.5 5.8 7.1 5.6 4.4 7.0 4.5 6.7 6.6 5.9 5.3 5.2 6.7 6.9 4.9

  問是否生產線1個工人其裝配時間比生產線2較長(假定二母體變異數相等)?

Ex. 11.10 兩個方案 (母體常態變異數未知但知相等) (2)

令 μ_1 爲生產線 1 的平均裝配時間

μ_2 爲生產線 2 的平均裝配時間

根據資料可知 $\bar{X}_1$=6.24, $\bar{X}_2$=5.996, S_1^2=0.9908, S_2^2=0.9904

1.設立兩假設

H_0: μ_1-$\mu_2 \le 0$ (兩生產線的平均裝配時間相等)

H_1: μ_1-$\mu_2 > 0$ (生產線 1 的時間比生產線 2 的時間長)

2.選擇檢定統計量

$n_1 < 30$, $n_2 < 30$爲小樣本，兩母體爲常態但變異數未知但知相等，因此我們以 t 分配來做假設檢定。

Ex. 11.10 兩個方案 (母體常態變異數未知但知相等) (3)

3.選擇顯著水準及決定拒絕域與接受域 (行動法則或決策法則)

選擇 α=0.05。因爲對立假設的符號爲>，故採右尾檢定。

而α=0.05，自由度 df = $n_1 + n_2 - 2 = 48$。

因此 t 分配的臨界值爲 $t_{48,0.05} \cong 1.645$

4. 計算檢定統計量

母體變異數未知，但知相等，先求：

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2}{n_1} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(25-1)(0.9908)}{25} + \frac{(25-1)(0.9904)}{25}}$$

$$= \sqrt{0.9906} = 0.9953$$

Ex. 11.10 兩個方案 (母體常態變異數未知但知相等) (4)

$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}=0.9953\sqrt{\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{25}}=0.2815$

檢定統計量 t 值爲： $t=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\dfrac{(6.24-5.996)-0}{0.2815}=0.8667$

或計算 P 值 = $P(t_{48} > 0.8667) = 0.1952$

5.下結論

因爲是單尾(右尾)檢定，而檢定統計量的觀察值爲 t = 0.8667，臨界值爲 1.6772，因 t = 0.8667 小於臨界值，因此不拒絕 H_0。

又因 P 值 = 0.1952 大於 α= 0.05，故不拒絕虛無假設。兩條生產線零件裝配時間顯著不同。

成對母體平均數差的統計推論

Notation

X_k :表示第 k 個母體的元素。

$D_i = X_{1i} - X_{2i}$ 。

μ_k :表示第 k 個母體的平均數。

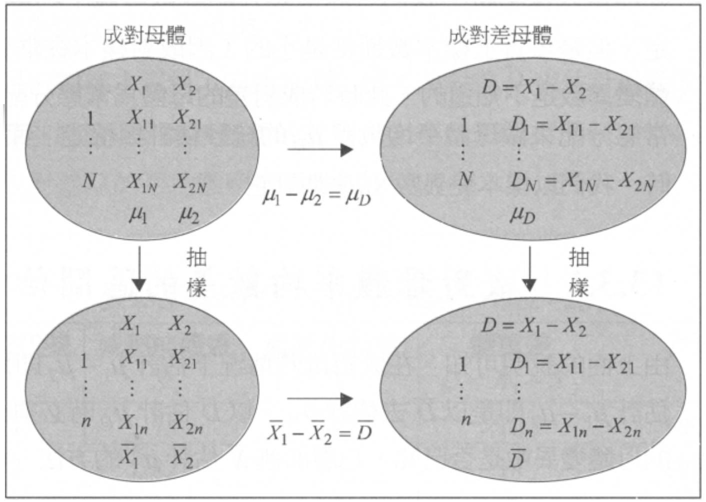
$\bar{X}_k$:表示第 k 個樣本的平均數。

μ_D: 兩母體平均數的差，$\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ 。

$\bar{D}$: 兩樣本平均數的差，$\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 。

σ_D^2: 母體成對差的變異數，$\sigma_D^2 = \sum_{i=1}^{N}(D_i - \mu_D)^2 / N$ 。

S_D^2: 樣本成對差的變異數，$S_D^2 = \sum_{i=1}^{n}(D_i - \mu_D)^2 /(n-1)$ 。



成對母體平均數差 μ_D 的 (1-α) C.I.

(1) 大樣本，變異數 σ_D^2 已知: $\bar{D} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{D}}$ ，$\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$ 。

(2) 大樣本，變異數 σ_D^2 未知: $\bar{D} \pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{D}}$ ，$S_{\bar{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ 。

(3) 小樣本，變異數 σ_D^2 已知: $\bar{D} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{D}}$ ，$\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}$ 。

(4) 小樣本，變異數 σ_D^2 未知: $\bar{D} \pm t_{n-1,\,\alpha/2}S_{\bar{D}}$ ，$S_{\bar{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ 。

57

Ex. 11.11 減肥中心的成績單 (1)

- 假設仁愛國小五年級本學期有5位小朋友參加了「新潮流」減肥班，經過30天的密集課程及飲食控制，其體重如表13.9。問訓練前後體重差異的信賴區間為何
 (設母體為常態分配，顯著水準為0.05)？

58

Ex. 11.11 減肥中心的成績單 (2)

表13.9 減肥學童體重的變化 單位：公斤

學童代號	減肥前體重 X1	減肥後體重 X2	體重差 D=X1-X2	D^2
1	75	65	10	100
2	82	68	14	196
3	61	53	8	64
4	62	57	5	25
5	77	62	15	225
			Sum(D)=52	Sum(D^2)=610

59

Ex. 11.11 減肥中心的成績單 (3)

因爲是成對樣本資料，因此我們已樣本成對差 $\overline{D}$ 來估計母體成對差μ_D

令 D 爲訓練前體重與訓練後體重的差異

樣本成對差 D 的平均數與變異數如下：

$$\overline{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{52}{5} = 10.4$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum D^2 - (\sum D)^2/n}{n-1}} = \sqrt{\frac{610-(52)^2/5}{5-1}} = 4.159$$

$\overline{D}$ 的標準差爲：$S_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{4.159}{\sqrt{5}} = 1.86$

60

Ex. 11.11 減肥中心的成績單 (4)

α= 0.05，故 $\alpha/2$= 0.025。因母體變異數未知，故以 t 分配來作信賴區間估計，其自由度爲 4，臨界值 $t_{4,\,0.025}=2.776$ 。

故 95% 信賴區間爲：

$\overline{D}\pm t_{4,0.025}S_{\overline{D}}=10.4\pm 2.776\times 1.86=10.4\pm 5.163=5.237\sim 15.563$

因此結論爲：「減肥課程前後體重差異 95%信賴區間爲 5.237~15.563公斤」。顯示減肥訓練有效，保守估計可減少5.23公斤，樂觀估計可減少 15.56公斤。

61

平均數差 μ_D 的假設檢定

$H_0:\mu_D=\theta,\quad H_0:\mu_D\le\theta,\quad H_0:\mu_D\ge\theta,$

$H_1:\mu_D\ne\theta,\quad H_1:\mu_D>\theta,\quad H_1:\mu_D<\theta,$

(1) 大樣本，母體變異數已知：$Z=\left(\overline{D}\text{-}\mu_D\right)/\sigma_{\overline{D}}$

(2) 大樣本，母體變異數未知：$Z=\left(\overline{D}\text{-}\mu_D\right)/S_{\overline{D}}$

(3) 小樣本，母體變異數已知：$Z=\left(\overline{D}\text{-}\mu_D\right)/\sigma_{\overline{D}}$

(2) 小樣本，母體變異數未知：$t_{n-1}=\left(\overline{D}\text{-}\mu_D\right)/S_{\overline{D}}$

62

Ex.13.12 減肥中心的成績單的檢定 (1)

問「Ex. 13.11」小朋友減肥有效嗎？試在顯著水準 α=0.05下，檢定成對差的平均數是否爲 0 (減肥無效)？

(假定成對差的母體爲常態分配)

63

Ex.11.12 減肥中心的成績單的檢定 (2)

由「Ex. 13.11」的結果知：

$\overline{D}=10.4,\ S_D=4.159,\ n=5$

1.設立兩假設

H_0: $\mu_D=0$(成對差的平均數等於0)

H_1: $\mu_D\ne 0$(成對差的平均數不等於0)

2.選擇檢定統計量

$n<30$爲小樣本，成對差母體爲常態但變異數未知，因此我們以 t 分配來做假設檢定。

64

Ex.11.12 減肥中心的成績單的檢定 (3)

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

因爲對立假設的符號爲 ≠，故採雙尾檢定。

而 $\alpha = 0.05$，$\alpha/2 = 0.025$，自由度 df = n-1 = 4。

因此t分配的臨界值爲 $-t_{4,0.025} = -2.776$

與 $t_{4,0.025} = 2.776$

65

Ex.11.12 減肥中心的成績單的檢定 (4)

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

小樣本母體變異數未知，檢定統計量t值爲：

$$t = \frac{(\bar{D} - \mu_D)}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{10.4-0}{\frac{4.159}{\sqrt{5}}} = 5.59$$

因爲是雙尾檢定，P 值爲：

P值 $= 2 \times P(t_4 > 5.59)$

因爲 $P(t_4 > 4.604) = 0.005$。因此可知 $P(t_4 > 5.59)$ 小於 0.005，

故 P 值 $= 2 \times P(t_4 > 5.59)$ 小於 $2 \times 0.005 = 0.01$

66

Ex.11.12 減肥中心的成績單的檢定 (5)

5.下結論

因爲檢定統計量 t = 5.59 大於臨界值，落於拒絕域，

或因 P 值小於 α= 0.05，因此拒絕虛無假設 H_0 。

故結論爲：「在顯著水準 α= 0.05下，母體成對差的

平均數不同於 0。」即減肥前後體重有顯著差異。

67

Ex.11.13 公司形象廣告效果的檢定 (小樣本母體常態) (1)

爲了檢定某廣告的效果，請消費者在觀賞廣告前與廣告後，

對公司的形象給予評分 (100分滿分)，結果如表所示。

問該形象廣告是否有效 (α=0.05)

觀賞前形象分數 X1i	**觀賞後形象分數 X2i**	**成對差 Di**	**Di^2**
64	65	-1	1
24	26	-2	4
42	46	-4	16
38	35	3	9
62	67	-5	25
		Sum(D)=-9	Sum(D^2)=55

68

Ex.11.13 公司形象廣告效果的檢定 (小樣本母體常態) (2)

因爲是成對樣本資料，因此我們以樣本成對差 $\overline{D}$ 來檢定母體成對差 μ_D。

令 $\overline{D}$ 爲觀賞影片前後對公司形象的差異，如表所示。

樣本成對差 D 的平均數與變異數如下：

$$\overline{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{-9}{5} = -1.8$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum D^2 - (\sum D)^2 / n}{n-1}} = \sqrt{\frac{55-(9)^2/5}{5-1}} = 3.117$$

69

Ex.11.13 公司形象廣告效果的檢定 (小樣本母體常態) (3)

1.設立兩假設

我們要滅定顧客對公司的形象是否提升，

故令μ_1爲觀賞影片前的形象分數

μ_2爲觀賞影片後的形象分數

μ_D爲兩者之差

假設設爲： H_0: $\mu_D = 0$ (μ_1-μ_2=0 或廣告沒有提昇公司形象)

H_1: $\mu_D < 0$ (μ_1-μ_2<0 或廣告有提昇公司形象)

2.選擇檢定統計量

$n = 5 < 30$ 爲小樣本，成對差母體爲常態且變異數未知，因此我們以t分配來做假設檢定。

70

Ex.11.13 公司形象廣告效果的檢定 (小樣本母體常態) (4)

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

因爲對立假設的符號爲 < ，故採左尾檢定。而 α=0.05，自由度 df = n-1 = 4。因此t分配的臨界值爲 $-t_{4,0.05}$= -2/132

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

小樣本母體變異數未知，檢定統計量t值爲：

$$t = \frac{(\overline{D}-\mu_D)}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{46\text{-}47.8}{\frac{3.11}{\sqrt{5}}} = \frac{-1.8}{1.39} = -1.29$$

71

Ex.11.13 公司形象廣告效果的檢定 (小樣本母體常態) (5)

5.下結論

因爲檢定統計量 t = -1.29 大於臨界值 -2.312，落於接受域。因此接受虛無假設 H_0。故結論爲：「在顯著水準 α= 0.05 下，廣告前的評分並未較廣告後爲低，亦即廣告後的形象並未提昇。」

72

兩母體比例差的統計推論

Notation

P_k :第 k 個母體的比例

$\hat{P}_k$:第 k 個樣本的比例

n_k :第 k 個樣本的數目

由中央極限定理可知，在大樣本 $\left(n_k\hat{P}_k>5;\ n_k(1-\hat{P}_k)>5\right)$ 的情形下：

$$\hat{P}_k \overset{CLT}{\sim} N\left(P_k,\ \frac{P_k(1-P_k)}{n_k}\right)$$

獨立大樣本 $\hat{P}_1-\hat{P}_2$ 的抽樣分配

$$\hat{P}_1-\hat{P}_2 \overset{CLT}{\sim} N\left(\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2},\ \sigma^2_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\right),$$

其中

$$\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = P_1-P_2$$

$$\sigma^2_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

兩母體比例差的 $(1-\alpha)$ C.I.

$$\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2\right)\pm Z_{\alpha/2}S_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}$$

其中

$$S^2_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}$$

Ex. 11.14 商品偏好比例的調查 (1)

- 設隨機抽取 360 個女性，得知偏好進口品的有 135 個，抽取 364 個男性，得知偏好進口品的有 91 個。問女性與男性對進口服飾的偏好比例差異的信賴區間為何 (信賴水準 90%)？

77

Ex. 11.14 商品偏好比例的調查 (2)

令 p_1 爲所有女性顧客對進口服飾的偏好比例

p_2 爲所有男性顧客對進口服飾的偏好比例

$\widehat{p_1}$, $\widehat{p_2}$ 爲相對應的樣本比例

已知：$n_1 = 360 \quad \widehat{p_1} = 135/360 = 0.375 \quad \widehat{q_1} = 1 - \widehat{p_1} = 0.625$

$n_2 = 364 \quad \widehat{p_2} = 91/364 = 0.25 \quad \widehat{q_2} = 1 - \widehat{p_2} = 0.75$

因 $n_1\widehat{p_1} = 360 \times 0.375 = 135,\quad n_1\widehat{q_1} = 360 \times 0.625 = 225$

$n_2\widehat{p_2} = 364 \times 0.25 = 91,\quad n_2\widehat{q_2} = 364 \times 0.75 = 273$

故爲大樣本。

78

Ex. 11.14 商品偏好比例的調查 (3)

因此我們利用常態分配來做母體比例差 $p_1 - p_2$ 的區間估計。

標準差爲：

$$S_{\widehat{p_1}-\widehat{p_2}} = \sqrt{\frac{\widehat{p_1}\widehat{q_1}}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}\widehat{q_2}}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.375)(0.625)}{360} + \frac{(0.25)(0.75)}{364}} = 0.034$$

因信賴水準 90%，故查表可得 $Z_{0.05} = 1.645$ 。

$p_1 - p_2$ 的信賴區間爲：

$$\widehat{p_1} - \widehat{p_2} \pm Z_{\alpha/2} S_{\widehat{p_1}-\widehat{p_2}} = (0.375 - 0.25) \pm 1.645 \times 0.034$$

$$= 0.125 \pm 0.056 = 0.069 \sim 0.181$$

79

Ex. 11.14 商品偏好比例的調查 (4)

即在信賴水準 90%下，兩母體比例差的信賴區間爲 0.069 ~ 0.181 。因此結論爲：「女性與男性對進口服飾的偏好比例差異的信賴區間爲 0.069 ~ 0.181」或「信賴水準90%下，女性與男性對進口服飾的偏好比例差爲 12.5%，估計誤差爲 ±5.6%。」該結果顯示女性比男性偏好進口服飾，此時保守估計有 6.9%，樂觀估計有 18.1%。

80

兩母體比例差的假設檢定

$$Z=\frac{\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2\right)-\left(P_1-P_2\right)}{S_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}$$

其中

$$S^2_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}$$

81

Ex.11.15 女性對進口服飾偏好比例高於男性比例嗎？(1)

「Ex.11.14」商品偏好比例調查，現請在顯著水準 α=0.1下，分別以臨界值法、Z值法以及 P 值法檢定女性對進口服飾偏好比例是否高於男性比例 10%。

82

Ex.11.15 女性對進口服飾偏好比例高於男性比例嗎？(2)

令 p_1 為所有女性顧客對進口服飾的偏好比例

p_2 為所有男性顧客對進口服飾的偏好比例

$\widehat{p}_1, \widehat{p}_2$ 為相對應的樣本比例

$n_1=360 \quad \widehat{p}_1=135/360=0.375 \quad \widehat{q}_1=1-\widehat{p}_1=0.625$

$n_2=364 \quad \widehat{p}_2=91/364=0.25 \quad \widehat{q}_2=1-\widehat{p}_2=0.75$

1.設立兩假設

H_0: $\widehat{p}_1$-$\widehat{p}_2 \le$10%(女顧客對服飾偏好比例不高於男性10%)

H_1: $\widehat{p}_1$-$\widehat{p}_2 >$10%(女顧客對服飾偏好比例高於男性10%)

83

Ex.11.15 女性對進口服飾偏好比例高於男性比例嗎？(3)

2.選擇檢定統計量

因為大樣本，所以我們以 Z 分配來做假設檢定。

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

因為對立假設的符號為 >，故採右尾檢定。

因 α=0.01，常態分配下的臨界值 Z 為 1.28。

84

Ex.11.15 女性對進口服飾偏好比例高於男性比例嗎？(4)

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

標準差估計值爲：

$$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}=\sqrt{\frac{(0.375)(0.625)}{360}+\frac{(0.25)(0.75)}{364}}=0.034$$

臨界值爲：

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)^*=\hat{p}_1-\hat{p}_2\text{-}Z_\alpha S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=0.1+1.28\times 0.034=0.1435$$

因此決策法則爲：$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)>0.1435$則拒絕 H_0，否則接受 H_0。

85

Ex.11.15 女性對進口服飾偏好比例高於男性比例嗎？(5)

4. 計算檢定統計量爲：

$$Z=\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}=\frac{(0.375\text{-}0.25)\text{-}0.1}{0.034}=0.735$$

因爲是右尾檢定，P 值爲：

P值 = P(Z >0.735) = 0.5-0.2704 = 0.2296

5.下結論

因爲 $\hat{p}_1-\hat{p}_2=0.125$ 小於 0.1435，落於接受域；或因 Z = 0.735 小於臨界值 1.28，落於接受域；或因 P 值 > α = 0.1，因此接受虛無假設 H_0 。即女性對進口服飾的偏好比例未高出男性 10%

86

Ex.11.16 兩生產線瑕疵率的檢討？(1)

- 有 3 條生產線，抽驗第 1 條與第 2 條生產線的產品，各條生產線面板的瑕疵率如下表，試問 2 條生產線的瑕疵率是否相同？(信賴水準95%)

兩生產線瑕疵率的比較

生產線	瑕疵品數目	抽樣數
生產線1	6	50
生產線2	6	40

87

Ex.11.16 兩生產線瑕疵率的檢討？(2)

令 p_1 爲生產線 1 所有產品的瑕疵比例

p_2 爲生產線 2 所有產品的瑕疵比例

根據題意知：

$n_1=50\ \ \hat{p}_1=6/50=0.12\ \ n_2=40\ \ \hat{p}_2=6/40=0.15$

1.設立兩假設

H_0: $\hat{p}_1\text{-}\hat{p}_2=0$ (兩條生產線產品瑕疵比例沒有差異)

H_1: $\hat{p}_1\text{-}\hat{p}_2\neq 0$ (兩條生產線產品瑕疵比例有差異)

2.選擇檢定統計量

因爲樣本爲獨立大樣本，我們使用Z分配來做假設檢定。

88

Ex.11.16 兩生產線瑕疵率的檢討？(3)

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

因爲對立假設的符號爲 ≠，故採雙尾檢定。

顯著水準 α=0.05 時，臨界值爲 -1.96 及 1.96。

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

混合樣本比例爲：

$$\bar{p} = \frac{n_1\widehat{p_1} + n_2\widehat{p_2}}{n_1 + n_2} = \frac{(50)(0.12) + (40)(0.15)}{50 + 40} = \frac{12}{90} = 0.133$$

$$\bar{q} = 1 - 0.133 = 0.867$$

標準差估計值爲：

$$S_{\widehat{p_1}-\widehat{p_2}} = \sqrt{\bar{p}\bar{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} = \sqrt{(0.133)(0.867)(\frac{1}{50} + \frac{1}{40})} = 0.072$$

89

Ex.11.16 兩生產線瑕疵率的檢討？(4)

檢定統計量爲：

$$Z = \frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{S_{\widehat{p_1}-\widehat{p_2}}} = \frac{(0.12\text{-}0.15)\text{-}0}{0.072} = -0.417$$

因爲是雙尾檢定，P值爲：

P值=2×P(Z <-0.417)=2×0.3372=0.6744

5.下結論

因爲 Z=-0.417 大於臨界值 -1.96，落於接受域。

或因 P 值>α=0.05，因此不拒絕虛無假設。

即兩生產線產品瑕疵比例沒有差異。

90

Ex.11.17 (1)

The U-Scan facility was recently installed at the Byrne Road Food-Town location. The store manager would like to know if the mean checkout time using the standard checkout method is longer than using the U-Scan. She gathered the following sample information. The time is measured from when the customer enters the line until their bags are in the cart. Hence the time includes both waiting in line and checking out.

91

Ex.11.17 (2)

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\mu_S \le \mu_U$

H_1: $\mu_S > \mu_U$

Step 2: State the level of significance.

The .01 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

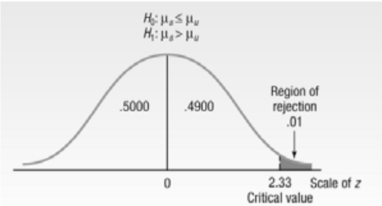
Because both samples are more than 30, we can use *z-distribution* as the test statistic.

92

Ex.11.17 (3)

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if $Z > Z_\alpha$, i.e. $Z > 2.33$



Ex.11.17 (4)

Step 5: Compute the value of z and make a decision

Customer Type	Sample Mean	Population Standard Deviation	Sample Size
Standard	5.50 minutes	0.40 minutes	50
U-Scan	5.30 minutes	0.30 minutes	100

$$z = \frac{\bar{X}_s - \bar{X}_u}{\sqrt{\frac{\sigma_s^2}{n_s} + \frac{\sigma_u^2}{n_u}}} = \frac{5.5 - 5.3}{\sqrt{\frac{0.40^2}{50} + \frac{0.30^2}{100}}} = \frac{0.2}{0.064} = 3.13$$

The computed value of 3.13 is larger than the critical value of 2.33. Our decision is to reject the null hypothesis. The difference of .20 minutes between the mean checkout time using the standard method is too large to have occurred by chance. We conclude the U-Scan method is faster.

Ex.11.18 (1)

Manelli Perfume Company recently developed a new fragrance that it plans to market under the name Heavenly. A number of market studies indicate that Heavenly has very good market potential. The Sales Department at Manelli is particularly interested in whether there is a difference in the proportions of younger and older women who would purchase Heavenly if it were marketed. There are two independent populations, a population consisting of the younger women and a population consisting of the older women. Each sampled woman will be asked to smell Heavenly and indicate whether she likes the fragrance well enough to purchase a bottle.

Ex.11.18 (2)

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\pi_1 = \pi_2$

H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$

Step 2: State the level of significance.

The .05 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

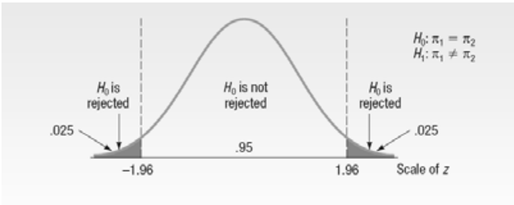
We will use the z-distribution

Ex.11.18 (3)

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if $Z > Z_{\alpha/2}$ or $Z < -Z_{\alpha/2}$

$Z > 1.96$ or $Z < -1.96$



97

Ex.11.18 (4)

Step 5: Compute the value of *z* and make a decision

Let p_1 = young women p_2 = older women

$$p_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{19}{100} = .19 \qquad p_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{62}{200} = .31$$

$$p_c = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{19 + 62}{100 + 200} = \frac{81}{300} = 0.27$$

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_c(1-p_c)}{n_1} + \frac{p_c(1-p_c)}{n_2}}} = \frac{.19 - .31}{\sqrt{\frac{.27(1-.27)}{100} + \frac{.27(1-.27)}{200}}} = -2.21$$

The computed value of 2.21 is in the area of rejection. Therefore, the null hypothesis is rejected at the .05 significance level. To put it another way, we reject the null hypothesis that the proportion of young women who would purchase Heavenly is equal to the proportion of older women who would purchase Heavenly.

98

Ex.11.19 (1)

Owens Lawn Care, Inc., manufactures and assembles lawnmowers that are shipped to dealers throughout the United States and Canada. Two different procedures have been proposed for mounting the engine on the frame of the lawnmower. The question is: Is there a difference in the mean time to mount the engines on the frames of the lawnmowers? The first procedure was developed by longtime Owens employee Herb Welles (designated as procedure 1), and the other procedure was developed by Owens Vice President of Engineering William Atkins (designated as procedure 2). To evaluate the two methods, it was decided to conduct a time and motion study.

99

Ex.11.19 (2)

A sample of five employees was timed using the Welles method and six using the Atkins method. The results, in minutes, are shown on the right.

Is there a difference in the mean mounting times? Use the .10 significance level.

Welles (minutes)	Atkins (minutes)
2	3
4	7
9	5
3	8
2	4
	3

100

Ex.11.19 (3)

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Step 2: State the level of significance. The .10 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

Because the population standard deviations are not known but are assumed to be equal, we use the pooled *t*-test.

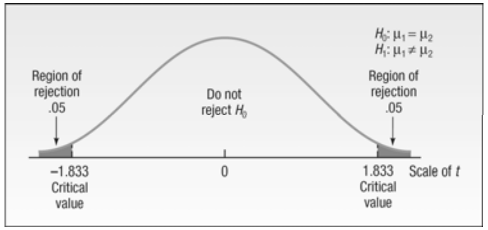
Ex.11.19 (4)

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if $t > t_{\alpha/2,n1+n2-2}$ or $t < -t_{\alpha/2,n1+n2-2}$

$t > t_{.05,9}$ or $t < -t_{.05,9}$

$t > 1.833$ or $t < -1.833$



Ex.11.19 (5)

Step 5: Compute the value of *t* and make a decision

(a) Calculate the sample standard deviations

Welles Method		Atkins Method	
X_1	$(X_1 - \bar{X}_1)^2$	X_2	$(X_2 - \bar{X}_2)^2$
2	$(2-4)^2 = 4$	3	$(3-5)^2 = 4$
4	$(4-4)^2 = 0$	7	$(7-5)^2 = 4$
9	$(9-4)^2 = 25$	5	$(5-5)^2 = 0$
3	$(3-4)^2 = 1$	8	$(8-5)^2 = 9$
2	$(2-4)^2 = 4$	4	$(4-5)^2 = 1$
		3	$(3-5)^2 = 4$
20	34	30	22

$$\bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_1}{n_1} = \frac{20}{5} = 4 \qquad \bar{X}_2 = \frac{\Sigma X_2}{n_2} = \frac{30}{6} = 5$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{\Sigma(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{34}{5-1}} = 2.9155 \qquad s_2 = \sqrt{\frac{\Sigma(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}} = \sqrt{\frac{22}{6-1}} = 2.0976$$

(b) Calculate the ***pooled*** sample standard deviation

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(5-1)(2.9155)^2 + (6-1)(2.0976)^2}{5 + 6 - 2} = 6.2222$$

Ex.11.19 (6)

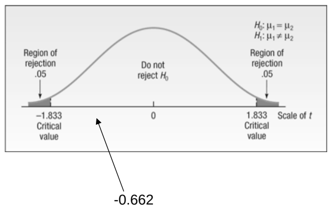
Step 5: Compute the value of *t* and make a decision

(c) Determine the value of t

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{4.00 - 5.00}{\sqrt{6.2222\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}} = -0.662$$

The decision is not to reject the null hypothesis, because 0.662 falls in the region between -1.833 and 1.833.

We conclude that there is no difference in the mean times to mount the engine on the frame using the two methods.



Ex.11.20 (1)

Personnel in a consumer testing laboratory are evaluating the absorbency of paper towels. They wish to compare a set of store brand towels to a similar group of name brand ones. For each brand they dip a ply of the paper into a tub of fluid, allow the paper to drain back into the vat for two minutes, and then evaluate the amount of liquid the paper has taken up from the vat. A random sample of 9 store brand paper towels absorbed the following amounts of liquid in milliliters.

8 8 3 1 9 7 5 5 12

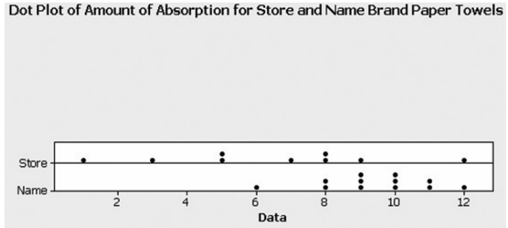
An independent random sample of 12 name brand towels absorbed the following amounts of liquid in milliliters:

12 11 10 6 8 9 9 10 11 9 8 10

Use the .10 significance level and test if there is a difference in the mean amount of liquid absorbed by the two types of paper towels.

Ex.11.20 (2)

The following dot plot provided by MINITAB shows the variances to be unequal.



Ex.11.20 (3)

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Step 2: State the level of significance.

The .10 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

We will use unequal variances *t*-test

Ex.11.20 (4)

$$df = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = \frac{[(3.32^2/9) + (1.621^2/12)]^2}{\frac{(3.32^2/9)^2}{9-1} + \frac{(1.621^2/12)^2}{12-1}} = \frac{1.4436^2}{.1875 + .0043} = 10.88$$

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if

$t > t_{\alpha/2 d.f.}$ or $t < -t_{\alpha/2, d.f.}$

$t > t_{.05,10}$ or $t < -t_{.05,10}$

$t > 1.812$ or $t < -1.812$

Descriptive Statistics: Store, Name

Variable	N	Mean	StDev
Store	9	6.44	3.32
Name	12	9.417	1.621

Step 5: Compute the value of t and make a decision

$$t = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{6.44 - 9.417}{\sqrt{\frac{3.32^2}{9} + \frac{1.621^2}{12}}} = -2.478$$

The computed value of t is less than the lower critical value, so our decision is to reject the null hypothesis. We conclude that the mean absorption rate for the two towels is not the same.

Ex.11.21 (1)

Nickel Savings and Loan wishes to compare the two companies it uses to appraise the value of residential homes. Nickel Savings selected a sample of 10 residential properties and scheduled both firms for an appraisal. The results, reported in \$000, are shown on the table (right).

At the .05 significance level, can we conclude there is a difference in the mean appraised values of the homes?

Home	Schadek	Bowyer
1	235	228
2	210	205
3	231	219
4	242	240
5	205	198
6	230	223
7	231	227
8	210	215
9	225	222
10	249	245

109

Ex.11.21 (2)

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\mu_d = 0$

H_1: $\mu_d \neq 0$

Step 2: State the level of significance.

The .05 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

We will use the *t*-test

110

Ex.11.21 (3)

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if

$t > t_{\alpha/2,\, n-1}$ or $t < -t_{\alpha/2,n-1}$

$t > t_{.025,9}$ or $t < -t_{.025,\,9}$

$t > 2.262$ or $t < -2.262$

TABLE 11–2 A Portion of the *t* Distribution from Appendix B.2

	Confidence Intervals					
	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%
	Level of Significance for One-Tailed Test					
df	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
	Level of Significance for Two-Tailed Test					
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	$\boxed{2.262}$	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587

111

Ex.11.21 (4)

Step 5: Compute the value of *t* and make a decision

Home	Schadek	Bowyer	Difference, d	$(d-\bar{d})$	$(d-\bar{d})^2$
1	235	228	7	2.4	5.76
2	210	205	5	0.4	0.16
3	231	219	12	7.4	54.76
4	242	240	2	−2.6	6.76
5	205	198	7	2.4	5.76
6	230	223	7	2.4	5.76
7	231	227	4	−0.6	0.36
8	210	215	−5	−9.6	92.16
9	225	222	3	−1.6	2.56
10	249	245	4	−0.6	0.36
			46	0	174.40

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d}{n} = \frac{46}{10} = 4.60$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\Sigma(d-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{174.4}{10-1}} = 4.402$$

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{4.6}{4.402/\sqrt{10}} = 3.305$$

The computed value of *t* is greater than the higher critical value, so our decision is to reject the null hypothesis. We conclude that there is a difference in the mean appraised values of the homes.

112

Exercises

- 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 47, 49, 51, 55