Ch 12 變 異 數 分 析

Analysis of Variance
(ANOVA)

F-Distribution

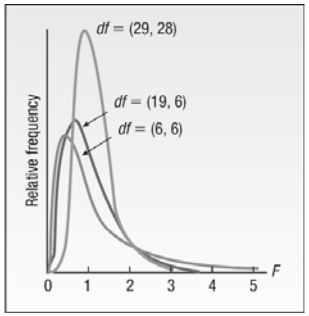
設有兩個母體均爲常態分配，即 $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 、$X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ，且 X_1 與 X_2 獨立。自 X_1 與 X_2 分別隨機抽出 n_1 與 n_2 個樣本，令

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1i}-\bar{X}_1\right)^2}{n_1-1} \quad , \quad S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2i}-\bar{X}_2\right)^2}{n_2-1},$$

則 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$ ，其中 n_1-1 與 n_2-1 分別爲 F 分配的自由度。

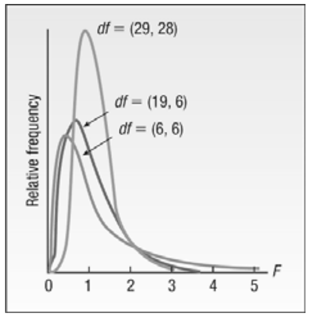
Characteristics of *F*-Distribution (1)

- There is a "family" of *F* Distributions.
- Each member of the family is determined by two parameters: the numerator degrees of freedom and the denominator degrees of freedom.
- *F* cannot be negative, and it is a continuous distribution.



Characteristics of *F*-Distribution (2)

- The *F* distribution is positively skewed.
- Its values range from 0 *to* ∞
- As $F \to \infty$ the curve approaches the *X*-axis.
- The *F* distribution can be used to test the hypothesis that the variance of one normal population equals the variance of another normal population.



Theorem 1: $F_{v_1,v2,1-\alpha} = 1/F_{v_2,v_1,\alpha}$

$$P\left(F_{v_1,v2} \ge F_{v_1,v2,1-\alpha}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \ge F_{v_1,v2,1-\alpha}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \le \frac{1}{F_{v_1,v2,1-\alpha}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(F_{v_2,v_1} \le \frac{1}{F_{v_1,v2,1-\alpha}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(F_{v_2,v_1} \ge \frac{1}{F_{v_1,v2,1-\alpha}}\right) = \alpha \Rightarrow F_{v_2,v_1,\alpha} = \frac{1}{F_{v_1,v2,1-\alpha}}$$

5

ANOVA (1)

- ANOVA is used to compare three or more population means to determine whether they could be equal.
- ANOVA allows us to compare the treatment means simultaneously and avoids the buildup Type-I error.
- The *F* distribution is also used for testing whether two or more sample means came from the same or equal populations.

6

ANOVA (2)

- Why not use the test learned in the previous chapter?
  - The major reason is the unsatisfactory buildup Type-I error!!
  - Compare the means of A,B,C and D! If use t-test, we need 6 different t tests. Assume the significant level =0.05.

    P(all correct)=(0.95)^6=0.735

    The buildup Type-I error = 1-0.735 = 0.265

7

Uses of ANOVA

- 變異數分析最早運用於農業實驗，一作物不同的種子，種植於條件相同的土地，以檢驗不同種子的產量是否不同。
- 目前已應用於個領域，例如：商品銷售位置的選擇與銷售量的關係；廣告對不同商品的效益；不同教學方法的成效是否相等的分析等 。

8

專有名詞

- 假設某教授想要研究四種不同教學方法的教學成果，於是隨機抽取 24 位同學，每 6 位同學接受一種教學法，最後透過測驗成績來檢驗教學成效 。
  - 接受實驗的學生稱為『實驗單位』(Experiment Unit)。
  - 不同的教學法稱為獨立變數 (Independent Variable)、實驗變數 (Experiment variable)、因子 (Factor)、處理 (Treatment) 。
  - 學生成績是實驗者欲觀察的反應變數，稱為依變數 (Dependent Variable)。

ANOVA Assumptions

- Assumptions:
  - The sampled populations follow the normal distribution, i.e. $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.
  - The populations have equal standard deviations, i.e. $\sigma_i^2 = \sigma^2$.
  - The populations are independent, i.e. $Y_i \perp Y_j$.

一因子變異數分析

One-Way ANOVA

ANOVA -- Example (1)

- 假設要檢驗三種不同廠牌汽車每公升汽油的里程數，可以使用 ANOVA 來進行檢驗，虛無假設與對立假設分別為：

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

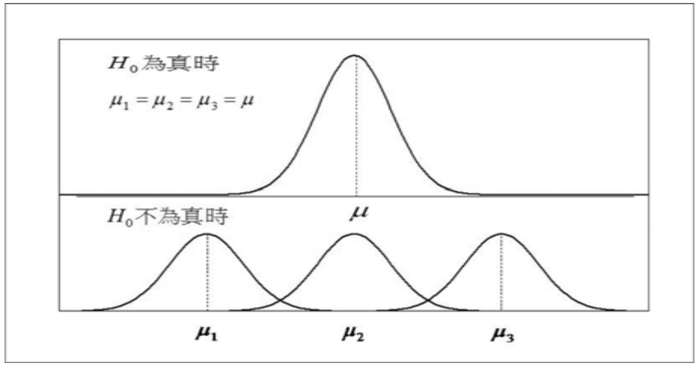
$H_1 : \mu_i$ 不全等

或表示爲

$H_0 : \mu_i = \mu$

$H_1 : \mu_i$ 不全等

ANOVA-- Example (2)



ANOVA-- Example (3)

所有汽車的每公升汽油行駛里程的總平均：

$$\mu = \frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + N_3\mu_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

廠牌	汽油行駛里程	母體平均
A（第一個母體）	$Y_{11}, Y_{12}, ,\ldots, Y_{1N_1}$	μ_1
B（第一個母體）	$Y_{21}, Y_{22}, ,\ldots, Y_{2N_2}$	μ_2
C（第一個母體）	$Y_{31}, Y_{32}, ,\ldots, Y_{3N_3}$	μ_3

ANOVA-- Example (4)

- 母體總差異 (Total difference)： $Y_{ij} - \mu$
- 母體組間差異 (Difference between subpopulation)（可解釋差異）： $\mu_i - \mu$
- 母體組內差異 (Difference within subpopulation)（不可解釋差異）： $Y_{ij} - \mu_i$
- 母體總差異＝母體組間差異＋母體組內差異

  $Y_{ij} - \mu = (\mu_i - \mu) + (Y_{ij} - \mu_i)$

ANOVA-- Example (5)

- 總差異平方和＝組內差異平方和＋組間差異平方和 (Sum of squares due to total, SST) = (Sum of squares due to factor, SSF) + (Sum of squares due to error, SSE)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(Y_{ij}-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(\mu_i-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(Y_{ij}-\mu_i)^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(Y_{ij}-\mu_i)(\mu_i-\mu)}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(\mu_i-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(Y_{ij}-\mu_i)^2$$

ANOVA-- Example (6)

- 若各小母體的平均數與整個母體平均數相等 ($\mu_i = \mu$)，則 SSF =0，但 SSE 不受影響。若有任一小母體平均數不等於整個母體的平均數 ($\mu_i \neq \mu$)，則 SSF $\neq$0，但SSE仍不受影響。

SST = SSF + SSE

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}\left(Y_{ij}-\mu\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}\left(\mu_i-\mu\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}\left(Y_{ij}-\mu_i\right)^2$$

17

ANOVA-- Example (7)

- 由此可知，當母體 SSF =0 時，各小母體平均數等於整個母體的平均數 ($\mu_i = \mu$)。
- 由於母體的 SST、SSF 與 SSE 無法得知，我們必須計算樣本的 SST、SSF 與 SSE 來替代。
- 當樣本的 SSF 相對於樣本 SSE 很大時，我們有足夠證據推論母體 SSF $\neq$0，因此存在任一小母體平均數不等於整個母體的平均數 ($\mu_i \neq \mu$)。若否，則接受 $\mu_i = \mu$ 。

18

ANOVA-- Example (8)

所有汽車的每公升汽油行駛里程的總平均：

$$\bar{\bar{Y}}=\frac{n_1\bar{Y}_1+n_2\bar{Y}_2+n_3\bar{Y}_3}{n_1+n_2+n_3}$$

廠牌	汽油行駛里程	母體平均
A（第一個母體）	$Y_{11}, Y_{12}, ,\ldots, Y_{1n_1}$	$\bar{Y}_1$
B（第一個母體）	$Y_{21}, Y_{22}, ,\ldots, Y_{2n_2}$	$\bar{Y}_2$
C（第一個母體）	$Y_{31}, Y_{32}, ,\ldots, Y_{3n_3}$	$\bar{Y}_3$

19

ANOVA-- Example (9)

- 樣本 SST = 樣本 SSF + 樣本 SSE

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\bar{Y}_i-\bar{\bar{Y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i\right)^2+2\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i\right)\left(\bar{Y}_i-\bar{\bar{Y}}\right)}_{=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\bar{Y}_i-\bar{\bar{Y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i\right)^2$$

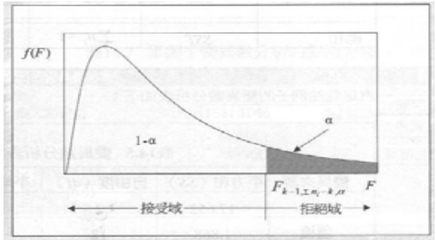
20

ANOVA-- Example (10)

- 當樣本的 SSF 相對於樣本 SSE 很大時，我們有足夠證據推論母體 SSF ≠0，因此存在任一小母體平均數不等於整個母體的平均數 ($\mu_i \neq \mu$)。然而，SSF 與 SSE 的大小會受到樣本數多寡的影響，因此不能直接比較，必須進一步求平均變異，分別為：
  - MSF (Mean squares due to factor): $MSF = \dfrac{SSF}{k-1}$
  - MSE (Mean squares due to random error): $MSE = \dfrac{SSE}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k}$
- $\dfrac{MSF}{MSE}$ 的抽樣分配為自由度 k-1 與 $\sum_{i=1}^{k} n_i - k$ 的 F 分配 ，其中 k 為組數，n_i 為第 i 組的樣本數。

ANOVA-- Example (11)

- 決策法則：
  (1) 若 $F > F_{k-1, \sum_{i=1}^{k} n_i - k, \alpha}$，則拒絕 H_0 。
  (2) 若 $F \leq F_{k-1, \sum_{i=1}^{k} n_i - k, \alpha}$，則接受 H_0 。



變異數分析表 (ANOVA Table)

變異來源	平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和 (MS)	F
因子 (組間)	SSF	$k-1$	$MSF = \dfrac{SSF}{k-1}$	$\dfrac{MSF}{MSE}$
隨機 (組內)	SSE	$\sum n_i - k$	$MSE = \dfrac{SSE}{\sum n_i - k}$	
總和	SST	$\sum n_i - 1$		

計算方法

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^{2} - n\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$SSF = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{Y}_i^{2} - n\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSE = SST - SSF$$

EX12.1 (1)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

假設生機衛生器材公司自 A、B、C、D 四個工作人員所生產的活塞 (valve) 中各抽取數個樣本，分別測得活塞的口徑(公分)如表 14.7 所示。問在 α=0.05 下，四個工人生產的活塞之精密度是否相同？

25

EX12.1 (2)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

表14.7 四個工人生產的活塞的口徑

樣本	工人A	工人B	工人C	工人D
1	6.13	6.06	6.24	6.09
2	6.06	6.16	6.18	6.03
3	6.11	6.03	6.38	5.99
4	6.09	6.07	6.34	6.01
5	6.20	5.99	6.36	
6		6.30	6.14	
7		6.02		
樣本平均數	6.118	6.090	6.273	6.03
樣本變異數	0.00277	0.01147	0.01019	0.00187

26

EX12.1 (3)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

令 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 分別爲四個工人所生產的活塞之平均口徑(公分)。

令 $\overline{Y}_1$、$\overline{Y}_2$、$\overline{Y}_3$、$\overline{Y}_4$ 分別爲樣本平均數，

$\overline{\overline{Y}}$ 爲總和樣本平均數。

S_1、S_2、S_3、S_4爲樣本變異數。

已知 k = 4，樣本數爲：n_1=5，n_2=7，n_3=6，n_4=4。

由表可知，計算 4 個樣本平均數可得：

$\overline{Y}_1 = 6.118$，$\overline{Y}_2 = 6.090$，$\overline{Y}_3 = 6.273$，$\overline{Y}_4 = 6.03$。

27

EX12.1 (4)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

總樣本平均數爲：

$$\overline{\overline{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum n_i \overline{Y}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$= \frac{5\times6.118 + 7\times6.090 + 6\times6.273 + 4\times6.03}{5+7+6+4} = 6.135$$

計算4個樣本變異數可得：

$S_1^2 = 0.0028$，$S_2^2 = 0.0115$，$S_3^2 = 0.0102$，$S_4^2 = 0.0019$。

28

EX12.1 (5)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

1.設立兩個假設

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (四個工人所生產的活塞平均口徑相等)

H_1: μ_i 不全等 (四個工人所生產的活塞平均口徑不相等)

對立假設表示至少某依個工人生產的活塞平均口徑與其他三個工人生產的活塞平均口徑不同。

2.選擇檢定統計量

因爲要比較四個常態母體的平均數所以用 F 檢定統計量來做檢定。

29

EX12.1 (6)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

3.決定拒絕域與接受域 (行動法則或決策法則)

顯著水準爲 $\alpha = 0.05$。ANOVA 檢定爲右尾檢定，拒絕域在 F 分配的右尾。F 分配的兩個自由度爲：

分子的自由度爲：df = k-1=4 - 1=3

分母的自由度爲：df = $\sum n_i$ - k=22 - 4 = 18

查 F 分配機率表知，F檢定的臨界值爲 $F_{3,18,0.05} = 3.16$。

30

EX12.1 (7)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

先算母體變異數的兩個估計值 MSF 與 MSE。SSF 爲：

$$SSF = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}})^2$$

$$= 5(6.118-6.135)^2+7(6.090-6.135)^2+6(6.273-6.135)^2+4(6.03-6.135)^2$$

$$= 0.174$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2 = (5-1)0.0028+(7-1)0.0115+(6-1)0.0102+(4-1)0.0019$$

$$= 0.1369$$

31

EX12.1 (8)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

$$MSF = \frac{SSF}{k-1} = \frac{0.174}{4-1} = 0.058$$

$$MSE = \frac{SSE}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} = \frac{0.1369}{22-4} = 0.0076$$

於是可得檢定統計量F值爲：

$$F = \frac{MSF}{MSE} = \frac{0.058}{0.0076} = 7.63$$

32

EX12.1 (9)
ABCD 四個工人生產的活塞口徑的檢定

5.下結論

因為 F = 7.63 大於臨界值 $F_{3,18,0.05}$=3.16，落在拒絕 H_0，故拒絕虛無假設。

結論為 :「在 $\alpha = 0.05$下， 4 個工人生產的活塞平均口徑不相同。」

33

EX12.2 (1)
Comparing Means of Two or More Populations

Recently a group of four major carriers joined in hiring Brunner Marketing Research, Inc., to survey recent passengers regarding their level of satisfaction with a recent flight. The survey included questions on ticketing, boarding, in-flight service, baggage handling, pilot communication, and so forth. Twenty-five questions offered a range of possible answers: excellent, good, fair, or poor. A response of excellent was given a score of 4, good a 3, fair a 2, and poor a 1. These responses were then totaled, so the total score was an indication of the satisfaction with the flight. Brunner Marketing Research, Inc., randomly selected and surveyed passengers from the four airlines.

34

EX12.2 (2)
Comparing Means of Two or More Populations

Is there a difference in the mean satisfaction level among the four airlines?
Use the .01 significance level.

Eastern	TWA	Allegheny	Ozark
94	75	70	68
90	68	73	70
85	77	76	72
80	83	78	65
	88	80	74
		68	65
		65	

35

EX12.2 (3)
Comparing Means of Two or More Populations

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\mu_E = \mu_A = \mu_T = \mu_O$

H_1: The means are not all equal

Reject H_0 if $F > F_{\alpha,k-1,n-k}$

Step 2: State the level of significance.

The .01 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

Because we are comparing means of more than two groups, use the F statistic.

36

EX12.2 (4)

Comparing Means of Two or More Populations

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if $F > F_{\alpha,k-1,n-k}$

$F > F_{01,4-1,22-4}$

$F > F_{01,3,18}$

$F > 5.801$

37

EX12.2 (5)

Comparing Means of Two or More Populations

Step 5: Compute the value of F and make a decision

ANOVA Table

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F
Treatments	SST	$k-1$	$SST/(k-1) = MST$	MST/MSE
Error	SSE	$n-k$	$SSE/(n-k) = MSE$	
Total	SS total	$n-1$		

$$\text{SS total} = \Sigma(X - \bar{X}_G)^2$$

where:

X is each sample observation.

$\bar{X}_G$ is the overall or grand mean.

$$SSE = \Sigma(X - \bar{X}_c)^2$$

where:

$\bar{X}_c$ is the sample mean for treatment c.

8

EX12.2 (6)

Comparing Means of Two or More Populations

$$\bar{X}_G = \frac{1{,}664}{22} = 75.64$$

	Eastern	TWA	Allegheny	Ozark	Total
	94	75	70	68	
	90	68	73	70	
	85	77	76	72	
	80	83	78	65	
		88	80	74	
			68	65	
			65		
Column total	349	391	510	414	1,664
n	4	5	7	6	22
Mean	87.25	78.20	72.86	69.00	75.64

39

EX12.2 (7)

Comparing Means of Two or More Populations

$(X - \bar{X}_G)^2$

Eastern	TWA	Allegheny	Ozark
18.36	−0.64	−5.64	−7.64
14.36	−7.64	−2.64	−5.64
9.36	1.36	0.36	−3.64
4.36	7.36	2.36	−10.64
	12.36	4.36	−1.64
		−7.64	−10.64
		−10.64	

$(X - \bar{X}_G)^2$

	Eastern	TWA	Allegheny	Ozark	Total
	337.09	0.41	31.81	58.37	
	206.21	58.37	6.97	31.81	
	87.61	1.85	0.13	13.25	
	19.0	54.17	5.57	113.21	
		152.77	19.01	2.69	
			58.37	113.21	
			113.21		
Total	649.91	267.57	235.07	332.54	1,485.09

$\boxed{\text{SS total} = \Sigma(X - \bar{X}_G)^2}$

$(X - \bar{X}_c)$

Eastern	TWA	Allegheny	Ozark
6.75	−3.2	−2.86	−1
2.75	−10.2	0.14	1
−2.25	−1.2	3.14	3
−7.25	4.8	5.14	−4
	9.8	7.14	5
		−4.86	−4
		−7.86	

$(X - \bar{X}_c)^2$

	Eastern	TWA	Allegheny	Ozark	Total
	45.5625	10.24	8.18	1	
	7.5625	104.04	0.02	1	
	5.0625	1.44	9.86	9	
	52.5625	23.04	26.42	16	
		96.04	50.98	25	
			23.62	16	
			61.78		
Total	110.7500	234.80	180.86	68	594.41

$\boxed{SSE = \Sigma(X - \bar{X}_c)^2}$

40

EX12.2 (8)
Comparing Means of Two or More Populations

SST = SS total − SSE = 1,485.09 − 594.41 = 890.68.

ANOVA Table

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F
Treatments	SST	$k-1$	SST/($k-1$) = MST	MST/MSE
Error	SSE	$n-k$	SSE/($n-k$) = MSE	
Total	SS total	$n-1$		

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F
Treatments	890.68	3	296.89	8.99
Error	594.41	18	33.02	
Total	1,485.09	21		

The computed value of F is 8.99, which is greater than the critical value of 5.09, so the null hypothesis is rejected.
Conclusion: The population means are not all equal. The mean scores are not the same for the four airlines; at this point we can only conclude there is a difference in the treatment means. We cannot determine which treatment groups differ or how many treatment groups differ.

Inferences About Treatment Means

- When we reject the null hypothesis that the means are equal, we may want to know which means differ.
- One of the simplest procedures is through the use of confidence intervals.
- $(1-\alpha)$ C.I. for $(\mu_i-\mu_j)$: $\left(\overline{Y}_i-\overline{Y}_j\right)\pm t_{v,\alpha/2}\sqrt{MSE}\sqrt{\dfrac{1}{n_i}+\dfrac{1}{n_j}}$,

v 爲 t 分配的自由度：$\sum_{i=1}^{k} n_i-k$ 。

EX12.3 Confidence Interval for the Difference Between Two Means (1)

From the previous example, develop a 95% confidence interval for the difference in the mean rating for Eastern and Ozark. Can we conclude that there is a difference between the two airlines' ratings?

$$(\overline{X}_E-\overline{X}_O)\pm t\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_E}+\frac{1}{n_O}\right)} = (87.25-69.00)\pm 2.101\sqrt{33.0\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}$$
$$= 18.25 \pm 7.79$$

The 95 percent confidence interval ranges from 10.46 up to 26.04. Both endpoints are positive; hence, we can conclude these treatment means differ significantly. That is, passengers on Eastern rated service significantly different from those on Ozark.

EX12.4 (1)
個教學設計都一樣有效?（完全隨機實驗）

假設師大柯教授設計了 4 種教學法，教學法 1，教學法 2，教學法 3 及教學法 4。她隨機抽取 23 個學生並隨機分配他們到4種教學法中的一種去實驗。實驗後的學生成績如表。
問在 α=0.05 下，這 4 種教學法的學習效果是否一樣？

EX12.4 (2)
個教學設計都一樣有效?(完全隨機實驗)

表14.13 四種教學法的學習效果

樣本觀察值	教學法1	教學法2	教學法3	教學法4
1	65	75	59	94
2	87	69	78	89
3	81	83	67	80
4	79	81	62	88
5	81	72	83	
6	69	79	76	
7		90		
樣本平均數	75.67	78.43	70.83	87.75
樣本變異數	66.67	50.62	91.77	33.58

EX12.4 (3)
個教學設計都一樣有效?(完全隨機實驗)

令 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 分別為 4 種教學法的平均學習成績。

令 $\overline{Y}_1$、$\overline{Y}_2$、$\overline{Y}_3$、$\overline{Y}_4$ 分別為樣本平均數,

$\overline{\overline{Y}}$ 為總和樣本平均數。

S_1、S_2、S_3、S_4為樣本變異數。

已知 $k = 4$,樣本數為:$n_1 = 6$,$n_2 = 7$,$n_3 = 6$,$n_4 = 4$。

EX12.4 (4)
個教學設計都一樣有效?(完全隨機實驗)

計算 4 個樣本平均數可得:

$\overline{Y}_1 = 75.67$, $\overline{Y}_2 = 78.43$, $\overline{Y}_3 = 70.83$,$\overline{Y}_4=87.75$。

總樣本平均數為:$\overline{\overline{Y}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{k}n_i}=\dfrac{65+87+\cdots+88}{23}=77.35$

計算4個樣本變異數可得:

$S_1^2=66.67$,$S_2^2=50.62$,$S_3^2=91.77$,$S_4^2=33.58$。

EX12.4 (5)
個教學設計都一樣有效?(完全隨機實驗)

1.設立兩個假設

H_0: $\mu_i = \mu$ (四種教學法的學生平均成績一樣)

H_1: μ_i 不全等 (四種教學法的學生平均成績並非一樣)

2.選擇檢定統計量

因為要比較四個常態母體的平均數所以用

F 檢定統計量來做檢定。

EX12.4 (5)
個教學設計都一樣有效?（完全隨機實驗）

3.決定拒絕域與接受域 (行動法則或決策法則)

顯著水準為 α=0.05。ANOVA 檢定為右尾檢定，

拒絕域在 F 分配的右尾。F 分配的兩個自由度為：

分子的自由度為：df = k-1 = 4-1 = 3

分母的自由度為：df = $\sum n_i$ - k = 24 - 4 = 19

查 F 分配機率表知，F 檢定的臨界值為 $F_{3,19,0.05}$ = 3.13。

EX12.4 (6)
個教學設計都一樣有效?（完全隨機實驗）

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

先算 MSF 與 MSE。SSF 為：

$$SSF = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}})^2$$

$$= 6(75.67-77.35)^2 + 7(78.43-77.35)^2 + 6(70.83-77.35)^2 + 4(87.75-77.35)^2$$

$$= 712.8$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k} (n-1)S_i^2 = (6-1)66.67 + (7-1)50.62 + (6-1)91.77 + (4-1)33.58$$

$$= 1196.66$$

EX12.4 (7)
個教學設計都一樣有效?（完全隨機實驗）

$$MSF = \frac{SSF}{k-1} = \frac{712.8}{4-1} = 237.6$$

$$MSE = \frac{SSE}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} = \frac{1196.66}{23-4} = 62.98$$

於是可得檢定統計量F值為：

$$F = \frac{MSF}{MSE} = \frac{237.6}{62.98} = 3.77$$

EX12.4 (7)
個教學設計都一樣有效?（完全隨機實驗）

表14.14 學習成績的ANOVA表

變異來源	平方和(SS)	自由度(df)	均方和(MS)	檢定統計量F
因子變異	SSF=712.8	3	237.6	F=3.77
隨機變異	SSE=1196.66	19	62.98	
總變異	SST=1909.46	22		

5.下結論

因為 F=3.77 大於臨界值 $F_{3,19,0.05}$= 3.13，落在拒絕 H_0,

固拒絕虛無假設。

結論為:「在α=0.05下，不同教學方法對學生成績有影響。」

二因子變異數分析

Two-Way ANOVA

53

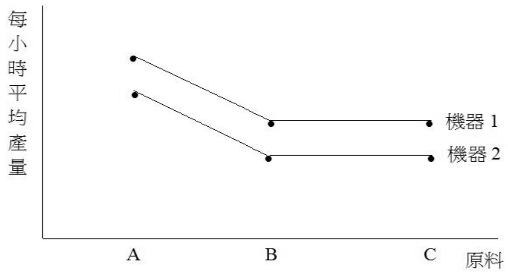
二因子變異數分析

- 考慮兩個或兩個因子以上的實驗，稱為多因子實驗。例如：
  - 影響產品品質的因子：機器、操作員、原料等
  - 影響農作產量的因子：種子、氣候、肥料等
  - 影響測驗成績因子：科目、唸書時間、年紀等
- 本章僅考慮二因子實驗。

54

交叉影響 (Interaction Effect)

- 二因子的ANOVA，需考慮因子之間是否有交叉影響。



55

二因子變異數分析:無交叉影響

Two-Way ANOVA: No Interaction Effect

56

例：

- 在『一因子ANOVA』的範例中，假設某教授想要研究四種不同教學方法的教學成果，於是隨機抽取 24 位同學，每 6 位同學接受一種教學法，最後透過測驗成績來檢驗教學成效 。
- 然而不同學生程度不同， 分配到好學生的教學方法，獲得測驗成績也會較高，因此學生程度會影響教學成效的檢驗。
- 為了避免學生程度的影響，我們只挑選 6 位學生，每位學生分別接受四種教學法，然後進行測驗，如此可以規避學生程度不同造成的影響。
- 此例中，學生即是第二因子。

57

例：

- 在『一因子完全隨機設計ANOVA』的範例：
  - 假設消基會想檢驗五種不同廠牌汽車的性能，於是隨機挑選 25 位司機，每 5 位司機駕駛同一廠牌的汽車行駛相同路線 100 公里，以檢驗汽車的耗油量。
- 然而不同司機的駕駛技術與態度，會影響檢驗結果。為了避免司機因素的影響，我們只挑選 5 位司機，每位司機分別測試五種廠牌汽車，如此可以避司機不同造成的影響。
- 此例中，司機即是第二因子。

58

二因子變異數分析:無交叉影響樣本資料表

因子	B_1	…	B_c	$\bar{Y}_{i\cdot}$
A_1	Y_{11}	…	Y_{1c}	$\bar{Y}_{1\cdot}$
⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_r	Y_{r1}	…	Y_{rc}	$\bar{Y}_{r\cdot}$
$\bar{Y}_{\cdot j}$	$\bar{Y}_{\cdot 1}$	…	$\bar{Y}_{\cdot c}$	$\bar{\bar{Y}}$

59

總差異分解

- 總差異=因子 A 差異 + 因子 B 差異+隨機差異

$$Y_{ij}-\bar{\bar{Y}}=(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{\bar{Y}})+(\bar{Y}_{\bullet j}-\bar{\bar{Y}})+(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet j}+\bar{\bar{Y}})$$

$\bar{\bar{Y}}=\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}Y_{ij}\right)/rc$ ： 樣本總平均 。

$\bar{Y}_{i\bullet}=\left(\sum_{j=1}^{c}Y_{ij}\right)/c$ ：A 因子第 i 組的平均數。

$Y_{\bullet j}=\left(\sum_{i=1}^{r}Y_{ij}\right)/r$ ：B 因子第 j 組的平均數。

60

總變異分解

- 總變異 = 因子A變異 + 因子B變異 + 隨機變異

  SST = SSF$_A$ + SSF$_B$ + SSE

$$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(Y_{ij}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{Y}_{\cdot j}-\bar{\bar{Y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{\bar{Y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{Y}_{\cdot j}+\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

自由度分別為：

rc-1 = (r-1) + (c-1) + (r-1)(c–1)

61

計算方式

$$SST=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(Y_{ij}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}Y_{ij}^{\ 2}-n\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSF_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=c\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=c\sum_{j=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i\cdot}\right)^2-n\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSF_B=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{\cdot j}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=r\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{\cdot j}-\bar{\bar{Y}}\right)^2=r\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{\cdot j}\right)^2-n\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSE=SST-SSF_A-SSF_B$$

$$n=rc$$

62

平均變異

- 樣本數多寡，會影響變異大小，因此變異須除以平均數，方能進行比較。

$$MSF_A=\frac{SSF_A}{r-1}$$

$$MSF_B=\frac{SSF_B}{c-1}$$

$$MSE=\frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$$

63

二因子變異數分析表 Two-Way ANOVA Table

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	*F* 值
*A*因子	$SSF_A=\Sigma\Sigma(\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{\bar{Y}})^2$	$r-1$	$MSF_A=\dfrac{SSF_A}{r-1}$	$F_A=\dfrac{MSF_A}{MSE}$
*B*因子	$SSF_B=\Sigma\Sigma(\bar{Y}_{\cdot j}-\bar{\bar{Y}})^2$	$c-1$	$MSF_B=\dfrac{SSF_B}{c-1}$	$F_B=\dfrac{MSF_B}{MSE}$
隨機	$SSE=\Sigma\Sigma(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{Y}_{\cdot j}+\bar{\bar{Y}})^2$	$(r-1)(c-1)$	$MSE=\dfrac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	
總合	$SST=\Sigma\Sigma(Y_{ij}-\bar{\bar{Y}})^2$	$rc-1$		

檢定因子 A 有無影響

F檢定統計量（A 因子）

$$F_A = \frac{MSF_A}{MSE} \sim F_{(r-1),(r-1)(c-1)}$$

決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則爲：

①若 $F_A > F_{(r-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則拒絕 H_0 。

②若 $F_A \le F_{(r-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則接受 H_0 。

65

檢定因子 B 有無影響

F 檢定統計量（B 因子）

$$F_B = \frac{MSF_B}{MSE} \sim F_{(c-1),(r-1)(c-1)}$$

決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則爲：

①若 $F_B > F_{(c-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則拒絕 H_0 。

②若 $F_B \le F_{(c-1),(r-1)(c-1),\alpha}$ ，則接受 H_0 。

66

EX12.5 (1) 四個教學設計都一樣有效?（隨機集區實驗）

「Ex. 12.4」柯教授已完全隨機實驗來檢定 4 種教學法的學習效果，當時她並未考慮學生的個別差異。因此她隨機抽取 7 個學生，並隨機分派 4 種教學法去實驗。實驗後的學生成績如表。問在 α=0.05 下，這 4 種教學法的學習效果是否一樣？

67

EX12.5 (2) 四個教學設計都一樣有效?（隨機集區實驗）

表14.19 四種教學法的學習效果

集區	處理				集區和	集區平均
	教學法1	教學法2	教學法3	教學法4		
學生1	76	75	73	80	304	76
學生2	78	71	76	87	312	78
學生3	73	80	69	81	303	75.75
學生4	79	78	65	80	302	75.5
學生5	80	75	83	82	320	80
學生6	67	77	78	81	303	75.75
學生7	72	86	79	79	316	79
處理和	525	542	523	570	2160	
處理平均數	75	77.43	74.71	81.43		

68

EX12.5 (3) 四個教學設計都一樣有效?(隨機集區實驗)

由題意可知：$k = 4$，$b = 7$，

總樣本觀察值 $\sum n_i = kb = 4\times 7 = 28$。

先計算 3 個處理及 7 個集區的平均數，結果如表所示。

其次計算總平均數為：$\bar{\bar{Y}} = \dfrac{2160}{28} = 77.14$

69

EX12.5 (4) 四個教學設計都一樣有效?(隨機集區實驗)

接著計算SSF，SSBK及SST：

$$SSF = b\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{\cdot i}-\bar{\bar{Y}})^2$$

$$= 7[(75-77.14)^2+(77.43-77.14)^2+(74.71-77.14)^2+(81.43-77.14)^2]$$

$$= 202.809$$

$$SSBK = k\sum_{i=1}^{b}(\bar{Y}_{i\cdot}-\bar{\bar{Y}})^2$$

$$= 4[(76-77.14)^2+(78-77.14)^2+(75.75-77.14)^2+(75.5-77.14)^2$$

$$+(80-77.14)^2+(75.75-77.14)^2+(79-77.14)^2] = 80.929$$

70

EX12.5 (4) 四個教學設計都一樣有效?(隨機集區實驗)

$$SST=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{Y}_{ij}-\bar{\bar{Y}})^2=(76-77.14)^2+(78-77.14)^2+(73-77.14)^2+(79-77.14)^2$$

$$+\cdots+(79-77.14)^2=735.429$$

$$SSE = SST - SSF - SSBK = 735.429 - 202.809 - 80.929 = 451.691$$

因此可得：$MSF=\dfrac{SSF}{k-1}=\dfrac{202.809}{4-1}=67.60$

$MSBK=\dfrac{SSBK}{b-1}=\dfrac{80.929}{7-1}=13.49$, $MSE=\dfrac{SSE}{(k-1)(b-1)}=\dfrac{451.691}{(4-1)(7-1)}=25.09$

於是可得檢定統計量F值為：$F=\dfrac{MSF}{MSE}=\dfrac{67.60}{25.09}=2.69$

71

EX12.5 (5) 四個教學設計都一樣有效?(隨機集區實驗)

表14.23 隨機集區實驗的ANOVA表

變異來源	平方和(SS)	自由度(df)	均方和(MS)	檢定統計量F
因子(處理)	202.809	3	67.60	2.69
集區	80.929	6	13.49	0.59
隨機	451.691	18	25.09	
總和	735.429	27		

72

EX12.5 (6) 四個教學設計都一樣有效?（隨機集區實驗）

1.設立兩個假設

H_0: $\mu_i = \mu$(四種教學法的學生平均成績一樣)

H_1: μ_i不全等(四種教學法的學生平均成績並非一樣)

2.選擇檢定統計量

因爲要比較四個常態母體的平均數所以用F檢定統計量來做檢定。

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

顯著水準爲α=0.05。ANOVA檢定爲右尾檢定，拒絕域在F分配的右尾。F分配的兩個自由度爲：

分子的自由度爲：df=k-1=3; 分母的自由度爲：df=(k-1)(b-1)=3×6=18

查F分配機率表知，F 檢定的臨界值爲 $F_{3,18,0.05} = 3.16$。

73

EX12.5 (7) 四個教學設計都一樣有效?（隨機集區實驗）

4.將檢定統計量與臨界值比較

因爲 F=2.69小於臨界值$F_{3,18,0.05}$=3.16

5.下結論

因檢定統計量小於臨界值，落在拒絕H_0, 固不拒絕虛無假設。

結論爲:「在α=0.05下，不同教學方法對學生成績無影響」，此一檢定結果與完全隨機設計的結論不同。

74

EX12.6 (1) 三種機器的產量效果

爲了解男性與女性工人與 3 種不同廠牌機器對產量的影響，測得二因子實驗之資料如下：

表14.26 三種機器的產量效果

工人別\機器別	機器1	機器2	機器3
男性工人	28	36	47
女性工人	20	29	38

請試做ANOVA表以檢定男性與女性工人和不同機器對產量是否有影響(α=0.05)？

75

EX12.6 (2) 三種機器的產量效果

首先，設立男女性別對產量是否有影響的假設如下：

H_0: 男女性別對產量無影響　H_1: 男女性別對產量有影響

及設立機器廠牌對產量是否有影響的假設如下：

H_0': 機器廠牌對產量無影響　H_1': 機器廠牌對產量有影響

其次，計算因子的平均數及變異數：

表14.27 三種機器的產量效果

工人別\機器別	機器1	機器2	機器3	$\bar{Y}_{i\cdot}$
男性工人	28	36	47	37
女性工人	20	29	38	29
$\bar{Y}_{\cdot j}$	24	32.5	42.5	$\bar{\bar{Y}}$=33

76

EX12.6 (3) 三種機器的產量效果

$$SSF_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\overline{Y}_{i\cdot}-\overline{\overline{Y}})^2=\sum_{i=1}^{r}c\overline{Y}_{i\cdot}^2-n\overline{\overline{Y}}^2=3[(37)^2+(29)^2]-6(33)^2=96$$

$$SSF_B=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\overline{Y}_{\cdot j}-\overline{\overline{Y}})^2=\sum_{i=1}^{r}c\overline{Y}_{\cdot j}^2-n\overline{\overline{Y}}^2=2[(24)^2+(32.5)^2+(42.5)^2]-6(33)^2$$

$$=343$$

$$SST=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(Y_{ij}-\overline{\overline{Y}})^2=28^2+36^2+\cdots+38^2-6(33)^2=440$$

$SSE=SST-SSF_A-SSF_B=440-96-343=1$

各變異數的自由度分別為：$SSF_A=2-1=1$，$SSF_B=3-1=2$，

SSE ：$(2-1)(3-1)=2$，$SST=2\times3-1=5$。

77

EX12.6 (4) 三種機器的產量效果

$$MSF_A=\frac{SSF_A}{r-1}=\frac{96}{2-1}=96,\ MSF_B=\frac{SSF_B}{c-1}=\frac{343}{3-1}=171.5$$

$$MSE=\frac{SSE}{(r-1)(c-1)}=\frac{1}{(2-1)(3-1)}=0.5$$

接著，先檢定性別對產量是否有影響，檢定統計量F值為：

$$F_A=\frac{MSF_A}{MSE}=\frac{96}{0.5}=192$$

進而，檢定不同機器對產量是否有影響，檢定統計量F值為：

$$F_B=\frac{MSF_B}{MSE}=\frac{171.5}{0.5}=343$$

78

EX12.6 (5) 三種機器的產量效果

表14.28 機器與性別對產量的影響的變異數分析表

變異來源	平方和(SS)	自由度(df)	均方和(MS)	檢定統計量 F
A(性別)因子	96	1	96	192
B (性別)因子	343	2	171.5	343
隨機	1	2	0.5	
總和	440	5		

男女工人對產量是否有影響，因檢定統計量$F_A=192>F_{1,2,0.05}=18.51$，故拒絕$H_0$，可下結論：「在$\alpha$=5%下，男女工人對產量有影響」。不同機器對產量是否有影響，因檢定統計量$F_B=343>F_{2,2,0.05}=19$，固拒絕H_0，因此下結論：「在α=5%下，不同機器對產量有影響」。

79

EX12.6 (6) 三種機器的產量效果

男女工人對產量是否有影響，因檢定統計量 $F_A=192>F_{1,2,0.05}=18.51$，故拒絕 H_0，可下結論：「在α=5%下，男女工人對產量有影響」。

不同機器對產量是否有影響，因檢定統計量 $F_B=343>F_{2,2,0.05}=19$，固拒絕H_0，因此下結論：「在α=5%下，不同機器對產量有影響」。

80

EX12.7 (1)
Two-Way Analysis of Variance

WARTA, the Warren Area Regional Transit Authority, is expanding bus service from the suburb of Starbrick into the central business district of Warren. There are four routes being considered from Starbrick to downtown Warren: (1) via U.S. 6, (2) via the West End, (3) via the Hickory Street Bridge, and (4) via Route 59.

81

EX12.7 (2)
Two-Way Analysis of Variance

WARTA conducted several tests to determine whether there was a difference in the mean travel times along the four routes. Because there will be many different drivers, the test was set up so each driver drove along each of the four routes. Next slide shows the travel time, in minutes, for each driver-route combination. At the .05 significance level, is there a difference in the mean travel time along the four routes? If we remove the effect of the drivers, is there a difference in the mean travel time?

82

EX12.7 (3)
Two-Way Analysis of Variance

	Travel Time From Starbrick to Warren (minutes)			
Driver	U.S. 6	West End	Hickory St.	Rte. 59
Deans	18	17	21	22
Snaverly	16	23	23	22
Ormson	21	21	26	22
Zollaco	23	22	29	25
Filbeck	25	24	28	28

83

EX12.7 (4)
Two-Way Analysis of Variance

Step 1: State the null and alternate hypotheses.

H_0: $\mu_u = \mu_w = \mu_h = \mu_r$

H_1: The means are not all equal

Reject H_0 if $F > F_{\alpha,k-1,n-k}$

Step 2: State the level of significance.

The .05 significance level is stated in the problem.

Step 3: Find the appropriate test statistic.

Because we are comparing means of more than two groups, use the F statistic

84

EX12.7 (5)
Two-Way Analysis of Variance

Step 4: State the decision rule.

Reject H_0 if $F > F_{\alpha,v1,v2}$

$$F > F_{.05,k-1,n-k}$$
$$F > F_{.05,4-1,20-4}$$
$$F > F_{.05,3,16}$$
$$F > 2.482$$

EX12.7 (6)
Two-Way Analysis of Variance

BLOCKING VARIABLE A second treatment variable that when included in the ANOVA analysis will have the effect of reducing the SSE term.

	Travel Time From Starbrick to Warren (minutes)			
Driver	U.S. 6	West End	Hickory St.	Rte. 59
Deans	18	17	21	22
Snaverly	16	23	23	22
Ormson	21	21	26	22
Zollaco	23	22	29	25
Filbeck	25	24	28	28

$$SSB = k\Sigma(\bar{X}_b - \bar{X}_G)^2$$

where

k is the number of treatments.
b is the number of blocks.
$\bar{X}_b$ is the sample mean of block b.
$\bar{X}_G$ is the overall or grand mean.

$$\begin{aligned} SSB &= k\Sigma(\bar{X}_b - \bar{X}_G)^2 \\ &= 4(19.5 - 22.8)^2 + 4(21.0 - 22.8)^2 + 4(22.5 - 22.8)^2 \\ &\quad + 4(24.75 - 22.8)^2 + 4(26.25 - 22.8)^2 \end{aligned}$$

EX12.7 (7)
Two-Way Analysis of Variance

SUM OF SQUARES ERROR, TWO-WAY $SSE = SS\ total - SST - SSB$

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F
Treatments	SST	$k - 1$	$SST/(k-1) = MST$	MST/MSE
Blocks	SSB	$b - 1$	$SSB/(b-1) = MSB$	MSB/MSE
Error	SSE	$(k-1)(b-1)$	$SSE/(k-1)(b-1) = MSE$	
Total	SS total	$n - 1$		

$$SSE = SS\ total - SST - SSB = 229.2 - 72.8 - 119.7 = 36.7$$

Source of Variation	(1) Sum of Squares	(2) Degrees of Freedom	(3) Mean Square (1)/(2)
Treatments	72.8	3	24.27
Blocks	119.7	4	29.93
Error	36.7	12	3.06
Total	229.2		

二因子變異數分析:有交叉影響

Two-Way ANOVA with Interaction Effect

二因子變異數分析:有交叉影響 樣本資料表

	B_1	…	B_c	$\bar{Y}_{i\cdot\cdot}$
A_1	$Y_{111}, Y_{112}, \ldots, Y_{11n}$ $(\bar{Y}_{11\cdot})$	…	$Y_{1c1}, Y_{1c2}, \ldots, Y_{1cn}$ $(\bar{Y}_{1c\cdot})$	$\bar{Y}_{1\cdot\cdot}$
A_2	$Y_{211}, Y_{212}, \ldots, Y_{21n}$ $(\bar{Y}_{21\cdot})$	…	$Y_{2c1}, Y_{2c2}, \ldots, Y_{2cn}$ $(\bar{Y}_{2c\cdot})$	$\bar{Y}_{2\cdot\cdot}$
:	:	…	:	:
A_r	$Y_{r11}, Y_{r12}, \ldots, Y_{r1n}$ $(\bar{Y}_{r1\cdot})$	…	$Y_{rc1}, Y_{rc2}, \ldots, Y_{rcn}$ $(\bar{Y}_{rc\cdot})$	$\bar{Y}_{r\cdot\cdot}$
$\bar{Y}_{\cdot j\cdot}$	$\bar{Y}_{\cdot 1\cdot}$	…	$\bar{Y}_{\cdot c\cdot}$	$\bar{\bar{Y}}$

Notations

$$\bar{Y}_{i\cdot\cdot} = \left(\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)/cn$$ ：A 因子第 i 組的樣本平均

$$\bar{Y}_{\cdot j\cdot} = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)/rn$$ ：B 因子第 j 組的樣本平均

$$\bar{Y}_{ij\cdot} = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)/n$$ ：A 因子第 i 組與B 因子第 j 組的樣本平均

$$\bar{\bar{Y}} = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)/rcn$$ ：總平均

總差異分解

- 總差異可以分解成：因子A差異，因子B差異，交互作用差異，隨機差異。
-
- SST = $SSF_A + SSF_B$ + SSI + SSE

$$Y_{ijk} - \bar{\bar{Y}} = (\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{Y}}) + (\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{Y}}) + (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{Y}}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot})$$

總變異分解

- SST = $SSF_A + SSF_B$ + SSI + SSE

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{Y}}\right)^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{Y}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot}\right)^2$$

二因子變異數分析：有交互作用 ANOVA Table

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值
A 因子	$SSF_A = \Sigma\Sigma\Sigma(\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{Y}})^2$	$r-1$	$MSF_A = \frac{SSF_A}{r-1}$	$F_A = \frac{MSF_A}{MSE}$
B 因子	$SSF_B = \Sigma\Sigma\Sigma(\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{Y}})^2$	$c-1$	$MSF_B = \frac{SSF_B}{c-1}$	$F_B = \frac{MSF_B}{MSE}$
I 因子	$SSI = \Sigma\Sigma\Sigma(\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{Y}})^2$	$(r-1)(c-1)$	$MSI = \frac{SSI}{(r-1)(c-1)}$	$F_I = \frac{MSI}{MSE}$
隨機	$SSE = \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot})^2$	$rcn - rc$	$MSE = \frac{SSE}{rcn - rc}$	
總合	$SST = \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - \bar{\bar{Y}})^2$	$rcn - 1$		

計算方法

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}\right)^2 - N\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSF_A = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = cn\sum_{i=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = cn\sum_{j=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet}\right)^2 - N\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSF_B = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{Y}_{\bullet j\bullet} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = rn\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{\bullet j\bullet} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 = rn\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{\bullet j\bullet}\right)^2 - N\left(\bar{\bar{Y}}\right)^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}\right)^2 - n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(\bar{Y}_{ij\bullet}\right)^2$$

$$SSI = SST - SSF_A - SSF_B - SSE$$

$$N = rcn$$

94

檢定因子A有無影響

檢定統計量

$$F_A = \frac{MSF_A}{MSE} \sim F_{(r-1),(n_T - rc)}$$

決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則為：

①若 $F_A > F_{(r-1),(n_T-rc),\alpha}$，則拒絕 H_0。

②若 $F_A \le F_{(r-1),(n_T-rc),\alpha}$，則接受 H_0。

5

檢定因子 B有無影響

檢定統計量

$$F_B = \frac{MSF_B}{MSE} \sim F_{(c-1),(n_T - rc)}$$

決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則為：

①若 $F_B > F_{(c-1),(n_T-rc),\alpha}$，則拒絕 H_0。

②若 $F_B \le F_{(c-1),(n_T-rc),\alpha}$，則接受 H_0。

檢定因子A與B有無交互作用影響

檢定統計量

$$F_I = \frac{MSI}{MSE} \sim F_{(r-1)(c-1),(n_T-rc)}$$

決策法則

在選定的顯著水準 α 下，決策法則爲：

①若 $F_I > F_{(r-1)(c-1),(n_T-rc),\alpha}$，則拒絕 H_0。

②若 $F_I \le F_{(r-1)(c-1),(n_T-rc),\alpha}$，則接受 H_0。

Graphical Observation of Mean Times

Our graphical observations show us that interaction effects are possible. The next step is to conduct statistical tests of hypothesis to further investigate the possible interaction effects.

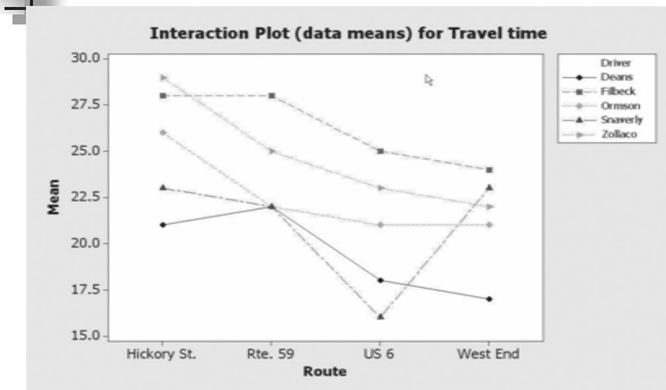
In summary, our study of travel times has several questions:

- Is there really an interaction between routes and drivers?
- Are the travel times for the drivers the same?
- Are the travel times for the routes the same?

Graphical Observation of Mean Times

Of the three questions, we are most interested in the test for interactions. To put it another way, does a particular route/driver combination result in significantly faster (or slower) driving times? Also, the results of the hypothesis test for interaction affect the way we analyze the route and driver questions.

交叉影響 (Interaction Effect)



Example – ANOVA with Replication

Microsoft Excel - two-way anova with interaction

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			US 6	West End	Hickory St	Route 59		
2		Deans	18	14	20	19		
3		Deans	15	17	21	22		
4		Deans	21	20	22	25		
5		Snaverly	19	20	24	24		
6		Snaverly	15	24	23	22		
7		Snaverly	14	25	22	20		
8		Ormson	19	23	25	23		
9		Ormson	21	21	29	23		
10		Ormson	23	19	24	20		
11		Zollaco	24	20	30	26		
12		Zollaco	20	24	28	25		
13		Zollaco	25	22	29	24		
14		Filbeck	27	24	28	28		
15		Filbeck	25	24	28	30		
16		Filbeck	23	24	28	26		
17								

Sheet4 Sheet1 Sheet2 Sheet3

Ready NUM

Three Tests in ANOVA with Replication

The ANOVA now has three sets of hypotheses to test:

1. *H*0: There is no interaction between drivers and routes.
   *H*1: There is interaction between drivers and routes.

2. *H*0: The driver means are the same.
   *H*1: The driver means are *not* the same.

3. *H*0: The route means are the same.
   *H*1: The route means are *not* the same.

ANOVA Table

Source	Sum of Squares	*df*	Mean Square	*F*
Route	Factor A	$k - 1$	$SSA/(k - 1) = MSA$	MSA/MSE
Driver	Factor B	$b - 1$	$SSB/(b - 1) = MSB$	MSB/MSE
Interaction	SSI	$(k - 1)(b - 1)$	$SSI/(k - 1)(b - 1) = MSI$	MSI/MSE
Error	SSE	$n - kb$	$SSE/(n - kb) = MSE$	
Total	SS total	$n - 1$		

EX12.8 (1) 包裝設計與行銷通路(超商)對產品銷售的影響(香水包裝、通路)。

假設國馨企管顧問公司接受委託研究包裝設計與行銷通路對某品牌女用香水的銷售量是否有影響。國馨的研究人員設計了三種包裝形式，形式1，形式2與形式3(包括容器(瓶裝)、容量，形狀及外觀等)。並在選定的3個百貨公司銷售。日銷售量如表14.31所示。

EX12.8 (2) 包裝設計與行銷通路(超商)對產品銷售的影響(香水包裝、通路)。

問 $\alpha = 0.05$下，檢定包裝形式，銷售通路及包裝與通路的交互作用。

1.檢定主要效應(因子A)：包裝形式對香水銷售量是否不同？

2.檢定主要效應(因子B)：行銷通路對香水銷售量是否不同？

3.檢定交互作用(因子A語音子B)：是否某一包裝選擇某一行銷通路銷路較佳，而另一包裝選擇其他通路較好？

EX12.8 (3) 包裝設計與行銷通路(超商)對產品銷售的影響(香水包裝、通路)。

表14.31 女用香水的包裝與行銷通路的檢定

因子A (包裝形式)	因子B(行銷通路)		
	1	2	3
1	115	94	100
	133	108	114
2	134	126	122
	140	118	136
3	96	86	85
	90	76	79

EX12.8 (4) 包裝設計與行銷通路(超商)對產品銷售的影響(香水包裝、通路)。

由題意知：因子A有三種包裝 r=3，因子B有三個行銷通路 c=3。

n=2。總樣本數 $n_T = rcn = 3\times3\times2=18$。

先計算各組 (cell) 的和及平均數。結果如表所示。

1.設立三組假設如下：

H_0: 包裝形式對香水銷售量無影響

H_1: 包裝形式對香水銷售量有影響

H_0: 銷售通路對香水銷售量無影響

H_1: 銷售通路對香水銷售量有影響

H_0: 包裝形式與行銷通路交互作用對香水銷售量無影響

H_1: 包裝形式與行銷通路交互作用對香水銷售量有影響

2.選擇檢定統計量

因爲要檢定多個常態母體的平均數所以用 F 檢定統計量來做檢定。

表14.32 女用香水的包裝與行銷通路的檢定

因子A (包裝形式)	因子B(行銷通路)			列總和	A因子的平均數
	1	2	3		
1	115	94	100		
	+133	+108	+114		
	248	202	214		
	$\overline{Y}_{11\cdot}=124$	$\overline{Y}_{12\cdot}=101$	$\overline{Y}_{13\cdot}=107$	664	$\overline{Y}_{1\cdot\cdot}=110.67$
2	134	126	122		
	+140	+118	+136		
	274	244	258		
	$\overline{Y}_{12\cdot}=137$	$\overline{Y}_{22\cdot}=122$	$\overline{Y}_{23\cdot}=129$	776	$\overline{Y}_{2\cdot\cdot}=129.33$
3	96	86	85		
	+90	+76	+79		
	186	162	164		
	$\overline{Y}_{31\cdot}=93$	$\overline{Y}_{32\cdot}=81$	$\overline{Y}_{33\cdot}=82$	512	$\overline{Y}_{3\cdot\cdot}=85.33$
行總和	708	608	636	1952	$\overline{\overline{Y}}= 108.44$
B因子的平均數	$\overline{Y}_{\cdot1\cdot}=118$	$\overline{Y}_{\cdot2\cdot}=101.33$	$\overline{Y}_{\cdot3\cdot}=106$		

3.決定拒絕域與接受域(行動法則或決策法則)

顯著水準為 α=0.05。ANOVA 檢定為右尾檢定，

拒絕域在F分配的右尾。 3個 F 分配的兩個自由度為：

A因子：

分子的自由度為：df=r-1=3-1=2

分母的自由度為：df=rc(n-1)=(3)(3)(2-1)=9

查F分配機率表知，F 檢定的臨界值為 $F_{2,9,0.05}$ = 4.26。

B因子：

分子的自由度為：df=c-1=3-1=2

分母的自由度為：df=rc(n-1)=(3)(3)(2-1)=9

109

查F分配機率表知，F 檢定的臨界值為 $F_{2,9,0.05}$=4.26。

交互作用：

分子的自由度為：df=(r-1)(c-1)=(2)(2)=4

分母的自由度為：df=rc(n-1)=(3)(3)(2-1)=9

查F分配機率表知，F 檢定的臨界值為 $F_{4,9,0.05}$=3.63。

110

4. 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)

$$SST=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\overline{\overline{Y}})^2=(115^2+133^2+\cdots+79^2)-18(108.44)^2$$

$$=219097-211666.20$$

$$=7430.80$$

$$SSF_A=cn\sum_{i=1}^{r}(\overline{Y}_{i\cdot\cdot}-\overline{\overline{Y}})^2$$

$$=(3)(2)(110.67^2+129.33^2+85.33^2)-18(108.44)^2$$

$$=5865.64$$

111

$$SSF_B=rn\sum_{j=1}^{c}(\overline{Y}_{\cdot j\cdot}-\overline{\overline{Y}})^2$$

$$=(3)(2)(118^2+101.33^2+106^2)-18(108.44)^2=5865.64$$

$$SSE=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij\cdot})^2$$

$$=(115^2+133^2+\cdots+79^2)-2(124^2+101^2+\cdots+82^2)$$

$$=219097-218508=589$$

$$SSI=SST-SSF_A-SSF_B-SSE$$

$$=7430.80-5865.64-900.41-589=75.75$$

112

將上面的變異除以各自的自由度可得平均平方和，由此可得下列檢定統計量：

$$F_A = \frac{MSF_A}{MSE} = \frac{2932.82}{65.44} = 44.82$$

$$F_A = \frac{MSF_B}{MSE} = \frac{450.21}{65.44} = 6.88$$

$$F_I = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{18.97}{65.44} = 0.29$$

可得變異數分析表如表14.35。

表14.35 女用香水的包裝與行銷通路的變異數分析表

變異來源	平方和(SS)	自由度(df)	均方和(MS)	檢定統計量F
A(性別)因子	5865.64	2	2932.82	44.82
B (性別)因子	900.41	2	450.21	6.88
交互作用	75.75	4	18.94	0.29
隨機誤差	589	9	65.44	
總和	7430.80	17		

5.下結論

檢定包裝形式對香水銷售量的影響，因檢定統計量 $F_A = 44.82$ 大於臨界值 $F_{2,9,0.05} = 4.26$，落在拒絕域，故拒絕虛無假設。結論為：「包裝形式對香水的銷售量有影響」。

檢定行銷通路對香水銷售量的影響，因檢定統計量 $F_B = 6.88$ 大於臨界值 $F_{2,9,0.05} = 4.26$，落在拒絕域，故拒絕虛無假設。

結論為:「行銷通路對香水的銷售量有影響」。

檢定包裝形式與行銷通路交互作用對香水銷售量的影響。因檢定統計量 $F_I = 0.29$ 小於臨界值 $F_{2,9,0.05} = 4.26$，落在接受域，故不拒絕虛無假設。

結論為:「包裝形式與行銷通路對香水的銷售量無影響」。

Exercises

- 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 47