第三章 目標規劃

3-1 前言

目標規劃(goal programming；GP)係在 1955 年由 Charnes，Cooper & Ferguson，在“管理科學(management science)”期刊中提出，但目標規劃之名詞正式出現在 1961 年出版的“線性規劃在管理與工業之應用(Management Models and Industrial Application of Linear Programming)”一書中。目標規劃是多準則決策(multiple criteria decision making，MCDM)最早期之應用，不僅可完成單一目標之最佳化，亦可尋找在許多衝突目標之間的最佳協調或尋求在目標滿意程度最高之狀況。雖然目標規劃具有多目標之架構，但線性之目標規劃在建模後卻可以用線性規劃之簡捷法加以求解，具有相當之求解便利性，故本書以專章來加以探討。目標規劃在六十年代及七十年代被廣泛應用到各類系統分析之問題中，特別值得注意之著作有二,一是在 1981 年時，Milan Zeleny 提出“The Pros and Cons of Goal Programming”一文中進行了目標規劃正反面評比分析；另一是在 1991 年，西班牙數學家 Carlos Remero 在“Handbook of Critical Issues in Goal Programming,"一書中對目標規劃提出了完整之評論。以下先定義幾個基本名詞：

- 屬性(attribute)：說明決策者之目標本體的描述，例如利潤、成本、風險等等。
- 目標(objective)：用來描述屬性之數學函數。
- 標的(target)：藉由決策者考慮所訂定對某種屬性可接受之成就程度。
- 兼具屬性之標的(target)亦可稱為目標，但此種目標(goal)具有特定之理想值。

3-2 目標規劃之內涵

目標規劃既然是多目標規劃之一種，在建模時首先必須針對多目標之格局進行目標之確認，在決策分析中，有四大類之目標經常被考慮，包括經濟目標、環境目標、生態目標、及區域發展目標。

而一般環境問題常用之多目標(multiple objectives)包括有：

- 最大效益或最小成本(maximize profit or minimize cost)
- 最大涵容能力之利用率(maximize utilization rate of assimilative capacity)
- 最大公平性(maximize risk)
- 最小風險性(minimize risk)

在選擇規劃目標時可依目標之可量化程度分成明確目標(tangible objective)及難以量化之目標(intan6ible objective)，明確之目標可用一般之量化方法加以分析如下：

- 成本/效益分析(cost / benefit analysis)

・福利經濟學(welfare economics)

・生態經濟學(ecology economics)

・資源經濟學(resource economics)

・環境經濟學(environmental economics)

・其他環境指標

・其他公平性指標

目標規劃之分類可以大致分爲並進型目標規劃(non-preemptive GP)及優先型目標規劃(preemptive GP)，分別說明如下：

(1) 並進目標規劃(non-Preemptive GP)：目標間無重要性之差距，即所有目標皆同等重要。亦即權重式目標規劃(weighted GP)，其通用式(generic formuation)爲：

$$\min \quad z=\sum_{k=1}^{K} w_k^- d_k^- + \sum_{k=1}^{K} w_k^+ d_k^+$$

s.t.

1、目標限制式(goal constraint)

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_{kj} X_j}_{\text{屬性(attribute)}} + \underbrace{d_k^- - d_k^-}_{\text{偏離變數(deviational variable)}} = \underbrace{g_k}_{\text{標的(target)}} \qquad \forall k$$

2、功能限制式(functional constratint)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=,\ge) b_i \qquad \forall i$$

3、非負限制式(non-negativity constraint)

$$x_j \ge 0 \qquad \forall j$$

$$d_k^-, d_k^+ \ge 0 \qquad \forall k$$

＊在目標規劃中，無論何種情況，互補關係式(complementary relationship)必須要

$$(d_k^-)(d_k^+) = 0$$

＊在目標規劃中，可以沒有功能限制式，此時問題之本質變成各目標間之協調與折衝。

目標限制式中，右端項說明決策可能被達到之標的，若我們想要得到滿意解，限制式之右端項之值必需儘量被滿足。在目標限制中，該項被滿足之程度以偏離變數(deviational variable)來描述，負偏離變數(d_k^-)表示低於第 k 個目標之數量，正偏離變數(d_k^+)則表示超過第 k 個目標標的值之數量。而目標函數中之 w_k^- 及 w_k^+ 爲 d_k^- 及 d_k^+ 所對應之權重。代表決策者對正及負偏差之主觀加權。在日標規劃中，目標函數之種類可以分成三類：

・$\min \quad z=f(d^+,d^-)$ ⇐ 雙面目標(two-sided goa1)

・$\min \quad z=f(d^+)$ ⇐ 單面目標(one-sided goal)

・$\min \quad z=f(d^-)$

其中第一種爲雙面目標(two sided goal)，第二級第三種爲單面目標(one sided goal)，目標規劃係唯一一種確定性數學規劃模式含有模糊數學之思考，此點可由建模時考慮到目標限制式之左側值能愈接近標的值愈好加以體會。

例題 3-1：

某一家公司考慮製造三種產品取代目前的產品，決策者優先考慮了三個主要因子：長期利潤、勞動力之穩定性和投資資本額。目標如下：

(1) 三種產品之長期利潤至少 125,000,000 元。

(2) 儘量維持現有雇用水準爲員工 4,000 人。

(3) 固定投資資本額少於 55,000,000 元。

所定的標準如下表 3.1：

表 3.1 例題 3-1 中之系統規劃條件

因子	產品之生產參數			標的 (單位)	懲罰權重 (penalty weight)
	1	2	3		
長期利潤 (10^3\$/產品)	12	9	15	≥125(百萬元/年)	5
雇用水準 (人)	5	3	4	=40(百名員工/年)	2(+)，4(-)
投資資本額 (10^3\$/產品)	5	7	8	≤55(百萬元/年)	3

解：

令 x_i：產品 1,2,3 之生產率(10^3 item/year)

y_i^-，y_i^+：偏離變數(deviational variable)

目標限制式：

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \ge 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \le 55 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 + y_1^- - y_1^+ = 125 \\ y_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_2^- - y_2^+ = 40 \\ y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + y_3^- - y_3^+ = 55 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0，y_i^-，y_i^+ \ge 0，\forall i$$

數學模型

$$\begin{aligned} \min\ & z = 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + 3y_3^+ \\ \text{s.t.}\ & 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 + y_1^- - y_1^+ = 125 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_2^- - y_2^+ = 40 \\ & 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + y_3^- - y_3^+ = 55 \\ & x_i \ge 0, y_i^-, y_i^+ \ge 0, \forall i \end{aligned}$$

最佳解：

$x_1 = 25/3$，$x_2 = 0$，$x_3 = 5/3$ (表產品之最佳產量)

$y_1^+ = 0$，$y_1^- = 0$ (表長期利潤正好達標的值)

$y_2^+ = 25/3$，$y_2^- = 0$(表員工需增聘$8\frac{1}{3}$人)

$y_3^+ = 0$，$y_3^- = 0$(表投資資本額正好達標的值)

$z = 16\frac{2}{3}$

結論：但 y_2^+ 之單位爲人數，產品之單位爲個數，不能用分數表達，需用整數規劃，故本題爲一多目標整數規劃之問題。

例題 3-2：

環境學家將台南縣市附近之河川環境品質加以評比，首先針對五種目標或屬性來考慮：景觀、遊憩、飲用、灌溉、臭味；這些項目若以 0～10 之間加以評點(愈高愈好)，可將調查列於下表：

表 3.2：例題 3-2 之調查表

河川	景觀	遊憩	飲用	灌溉	臭味
1	4	6	3	4	7
2	2	2	10	1	10
3	4	10	5	5	4
4	4	7	1	10	3
5	1	7	6	2	8

決策人員對這些目標之權重尚未決定，若每條河川之總共點數爲 C，如果決策者人員已經做了結論；第 2 條河比第 1 條好，第 3 條河比第 2 條好，第 3 條河比第 4 條好，第 5 條河比第 1 條好，第 5 條河比第 2 條好，若權重之變數定義如下：

$$\begin{cases} A_1 = \text{景觀之權重} \\ A_2 = \text{遊憩之權重} \\ A_3 = \text{飲用之權重} \\ A_4 = \text{灌溉之權重} \\ A_5 = \text{臭味之權重} \end{cases}$$

但 $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5 = 1$

則試問如何決定各個權重 A_1～A_5 來滿足受訪人員對此 5 條河川之綜合偏好。例如第 2 條河川比第一條好時，有下列之條件成立：

$$4A_1+6A_2+3A_3+4A_4+7A_5 \le 2A_1+2A_2+10A_3+A_4+10A_5$$

請建立 GP 模式，找出一組權重能讓五種綜合偏好所得之懲罰總和爲最小。

解：

由題目知有五種偏好，第 2 條比第 1 條好，第 3 條比第 4 條好，第 5 條河比第 1 條好，第 5 條河比第 2 條好