A Note on Fisher Separation Theorem

by De-Xing Guan

March 2007

Irving Fisher 在他著名的利息論 (*The Theory of Interest*) 中提到借貸市場 (credit market) 的出現，會使資源跨期配置的效率提升，因為事前投資 (或資金的使用) 和事前儲蓄 (或資金的來源) 的決策可以分開獨立決定；或是說投資決策和效用或偏好無關，因為消費和儲蓄行為取決於個人的效用或偏好。 此即著名的費雪分離定理 (*Fisher Separation Theorem*)。

若以債券市場作為借貸市場的代表，由於個人終身預算限制式，在相鄰兩期變數的平面上為一直線，因此它和兩軸所圍起來的消費可能集合 (consumption possibility set) 會較生產函數和兩軸所圍起來的生產可能集合 (production possibility set) 來得大，於是在有債券市場的情形下，代表性個人的效用是會上升的。 此外，在均衡時, *MRS=MRT=1+r*, 即兩期消費的邊際替代率會等於邊際轉換率，同時等於一加實質利率。 我們用下面這個簡單的例子來說明上述結果。

假設某人效用函數為 $U(C_1, C_2)$，為兩期消費的函數，其終身預算限制為:

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$$

此人希望在終身預算限制下求效用最大。 假設生產函數為 $Y_t = f(K_{t-1})$，投資定義為: $I_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1}$, t=1,2, 如果我們在橫軸為 C_1, Y_1, K_1 (即第一期商品)，縱軸為 C_2, Y_2, K_2 (即第二期商品) 的平面上作圖，則由於在消費者效用最大時，無異曲線會和終身預算線相切，所以 *MRS=1+r*。

因為在兩期模型中，K_0 是外生給定的，於是 Y_1 也是外生給定，因此只需要第二期商品市場均衡條件: $Y_2 = C_2 + K_2 - (1-\delta)K_1$，就可形成生產可能線。
令 $F(K_1, K_2) = f(K_1) - Y_2 = f(K_1) - C_2 - K_2 + (1-\delta)K_1 = 0$，此式即生產可能線的方程式。 根據隱函數定理 (*Implicit Function Theorem*)，生產可能線的斜率為:

$$MRT=\frac{dK_2}{dK_1}=-\frac{\partial F/\partial K_1}{\partial F/\partial K_2}=\frac{df(K_1)}{dK_1}+(1-\delta)=MPK+1-\delta$$

由於在廠商利潤最大時, 生產可能線會和終身預算限制式相切, 所以 $MRT=MPK+1-\delta=1+r$, 將消費者效用最大時的均衡條件聯立可得:

$$\frac{MU_{C_1}}{MU_{C_2}}=MRS=MRT=MPK+1-\delta=1+r$$

不過儘管切線斜率相同, 消費者效用最大均衡點和生產者利潤最大均衡點, 並不是同一點, 這是因為會有儲蓄。 在沒有借貸市場時, 唯一的儲蓄方式就是累積實質資本財, 而當有譬如債券市場出現時, 又多了一個儲蓄的管道, 於是資源跨期分配的效率自然會較高, 而事前投資 (累積實質資本財) 和事前儲蓄 (可用發行公司債的方式在債市直接融資), 就不一定要相同, 這是兩個不一樣的市場決策, 此即費雪分離定理的主旨。

有的財務課本將此定理稱為分離原理 (*separation principle*), 而且有約略不同的解釋, 不過指的都是同一件事情。 有興趣的同學可參考以下文獻:

Irving Fisher (1930): *The Theory of Interest*, London: Macmillan.

Stephen A. Ross, Randolph W. Westerfield, and Jeffrey Jaffe (2005): *Corporate Finance*, 7th edition, New York: McGraw-Hill, p. 100 and pp. 279-280.

http://en.wikipedia.org/wiki/Fisher_separation_theorem