A Note on the Method of Lagrange Multipliers

by De-Xing Guan

March 2007

拉式乘數法是法國數學家 Joseph-Louis Lagrange 在十八世紀發明的，它主要的功能是求解“受限制之下極大或極小化”的問題。 由於幾乎所有的經濟問題都屬於這個範圍，因此它是一個非常重要且常用的方法。 它事實上是瑞士數學家 Leonhard Euler 發展出的變分法 (calculus of variations) 的延伸，因為在古典變分的問題中，通常是沒有限制式的極大或極小化問題 (但通常仍有邊界條件 (boundary conditions))。 以下我用一個簡單的例子來說明拉式乘數法。

假設某人效用函數為 $U(C_1, C_2)$，為兩期消費的函數，其終身預算限制為:

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$$

此人希望在終身預算限制下求效用最大。 拉式乘數法的基本策略就是利用一個虛擬的乘數 λ，將目標函數 (objective function，即欲求極大或極小的函數，本例中為上述的效用函數) 和限制式連結成一個新的函數 L:

$$L(C_1, C_2, \lambda) = U(C_1, C_2) + \lambda[(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}) - (C_1 + \frac{C_2}{1+r})]$$

如此一來，拉式函數 L 又成了一個沒有限制式的古典變分問題，於是可以用原來 Euler 的方法求解。 一般來說這個問題的精確解 (exact solution) 不一定存在，就算存在也不一定解的出來，因為目標函數和限制式都不一定是線性的。 此處我不打算討論這個問題，因為頗為複雜，有興趣者請參考下頁所附的參考書。

不過不管是否解得出精確解，至少我們可以得到這個轉變後極大化問題的一階必要條件 (first-order necessary conditions (FOC)) 如下:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial C_1} = \dfrac{\partial U}{\partial C_1} - \lambda = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial C_2} = \dfrac{\partial U}{\partial C_2} - \dfrac{\lambda}{1+r} = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = (Y_1 + \dfrac{Y_2}{1+r}) - (C_1 + \dfrac{C_2}{1+r}) = 0$

我們若將 (1) 代入 (2), 並消去 λ, 可得:

(4) $\dfrac{MU_{C_1}}{MU_{C_2}} (\equiv MRS) = 1 + r$

(4) 即所謂的 Euler 方程式 (*Euler equation*), 其中 $MU_{C_1} \equiv \dfrac{\partial U}{\partial C_1}$, $MU_{C_2} \equiv \dfrac{\partial U}{\partial C_2}$, 而 (3) 式即為終身預算限制式。 Euler 方程式描述的就是無異曲線和終身預算限制式的切點, 即當此人效用最大時, 其兩期消費的邊際替代率 (marginal rate of substitution, MRS) 會等於毛利率 (即 $1+r$)。

拉式乘數法還可以用在兩期以上的動態分析, 以及一個以上限制式的最適化問題; 此外, 它和非線性規劃 (nonlinear programming) 中的 Kuhn-Tucker Theorem 也有非常密切的關係, 而後者是角解 (corner solutions, 即最適解不是切點, 而是出現在圖形的角落上) 的必備數學工具, 由此可見拉式乘數的重要性。 以上細節請參考任何一本數理經濟學的書, 譬如我的最愛:

Michael D. Intriligator (1971): *Mathematical Optimization and Economic Theory*, New Jersey: Prentice-Hall.