

## MACROECONOMICS

## Homework # 7

Due: May 6, 2025

1. 若在 Robert Solow 的成長模型下，假設總合生產函數為  $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ ，商品市場均衡條件為  $Y = C + I$ ，其中  $Y$  為總合產出， $C$  為總合消費， $I$  為總合投資， $K$  為總合資本， $L$  為總合勞動， $A$  為技術水準， $0 < \alpha < 1$ 。假設人口成長率為  $n$ ，資本折舊率為  $\delta$ ，儲蓄率為  $s$ ，而所有市場都是完全競爭。我們定義平衡成長路徑 (*balanced growth path*, BGP) 為每人產出成長率和每人資本成長率相同的狀態。請參考 Mankiw 課本或我的講義，<sup>1</sup> 回答以下問題：
  - (1) 若技術進步率為 0，請求出 BGP 之下的每人產出水準 (以各參數表示)。(20%)
  - (2) 若技術進步率為  $\mu > 0$ ，則 BGP 之下的每人產出水準和每人產出成長率分別為何？(20%)
  - (3) 儲蓄率上升會使長期每人產出成長率上升嗎？試說明之。(20%)
2. 接前題，如果此時我們令  $L=1$  且  $\alpha=1$ ，則  $Y=AK$ 。請問這就是 Paul Romer 和 Sergio Rebelo 所謂的「AK 模型」嗎？在 Solow 模型中，通常需要有不斷的技術進步，才能使長期安定狀態下的每人產出成長，請問 AK 模型也需要靠不斷的技術進步，才能使長期安定狀態下的每人產出成長嗎？試說明是或不是的理由。(40%)

---

<sup>1</sup> <https://web.ntpu.edu.tw/~guan/courses/GrowthABC.pdf>

## 作業簡答

1. (1) 根據 Solow 成長理論的基本微分方程： $\dot{k} = sAk^\alpha - (n + \delta)k$ ，若技術進步

率  $\mu$  為 0，則當達到長期安定狀態時， $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\mu}{1-\alpha} = 0$ ，代回上式得到：

$$sAk^\alpha = (n + \delta)k, \text{ 可解出長期安定狀態每人資本數量為： } k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

又因  $y = Ak^\alpha$ ，故可解出長期安定狀態時每人產出為

$$y^* = A(k^*)^\alpha = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

$$(2) \quad \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\mu}{1-\alpha}.$$

- (3) 因為  $0 < s < 1$ ，儲蓄率不可能持續成長，所以不會像技術進步一樣使長期每人產出成長率上升。

2. 只是方程式相同，但經濟意義不同。AK 模型是  $Y = AK^{\alpha+\gamma}$  在  $\alpha + \gamma = 1$  情形下的特例，此時資本份額仍然小於 1 (勞動份額仍然大於 0)，而題目中直接令  $\alpha = 1$ ，這表示並沒有知識資本產生的外部性 ( $\gamma = 0$ )，顯然違反 Paul Romer 的原意。AK 模型短期就是長期 (剎那就是永恆)，長短期成長率是一樣的；又因為每人所得在 BGP 的成長率等於每人資本成長率： $sA - \delta$ ，所以即使沒有技術進步，只要  $sA > \delta$ ，那麼就仍會有長期每人所得的成長。