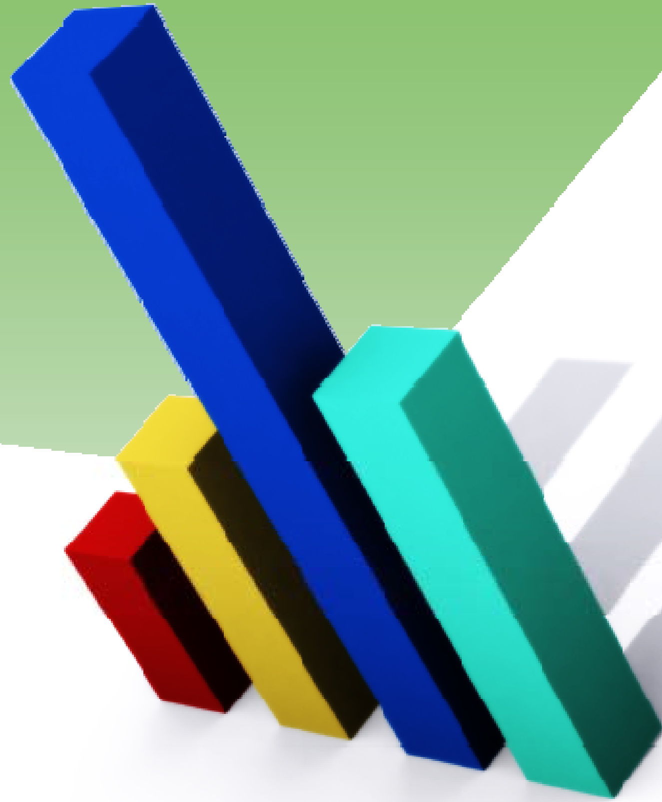
第 10 章



估計的介紹

先前已討論過...

第7 與第8 章：

- 二項實驗、卜瓦松機率分配、常態分配與指數分配，讓我們為計算 X（母體的構成元素）的機率做好準備。
- We may need to know the parameters for the following distributions before using these distributions:
  - 二項實驗：p;
  - 卜瓦松機率分配：μ;
  - 常態分配：μ 和 σ;
  - 指數分配：λ 或 μ

先前已討論過...

第9 章：

抽樣分配讓我們為統計量做好準備。

我們需要以下的參數

樣本平均數：μ 和 σ

母體樣本：p

兩樣本平均數間差異期望值與標準誤：μ_1、σ_1和μ_2、σ_2

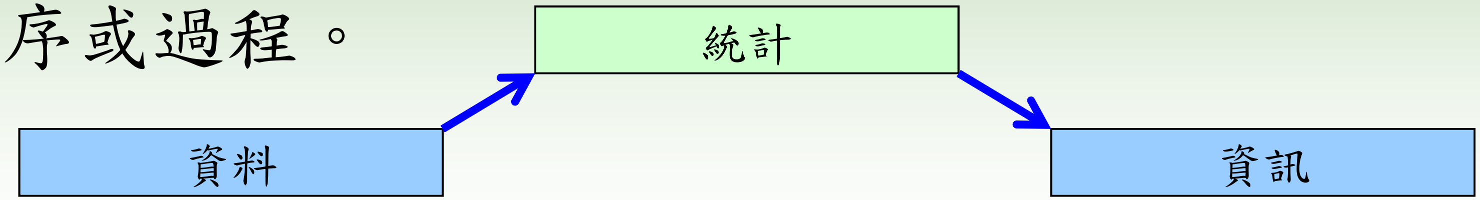
接下來要討論的是...

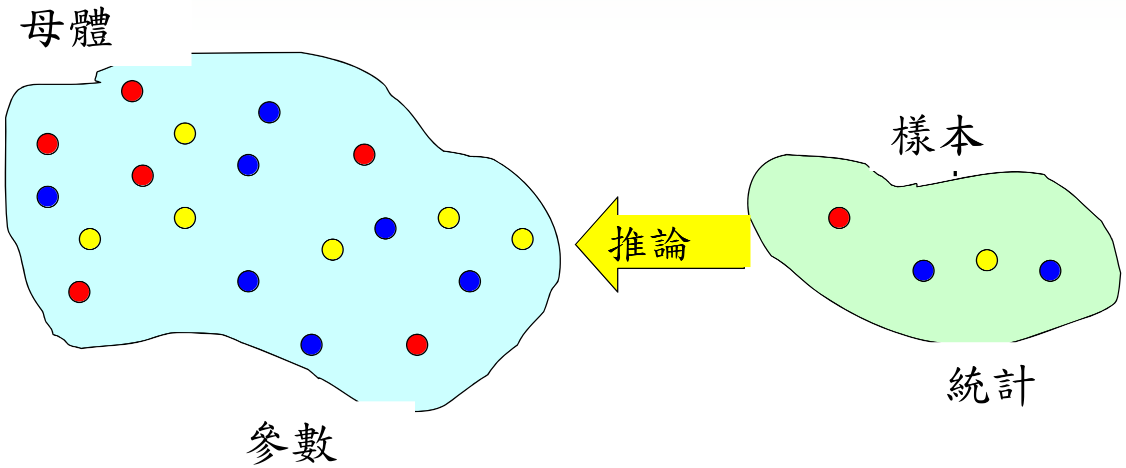
Difficulty: 在現實中母體通常是未知的, and thus we could not use these probability distributions with unknown parameters……….

Solution: 我們將使用抽樣分配來推論未知的母體參數。

統計推論

統計推論（statistical inference）是我們從樣本中獲得關於母體的資訊並且從中推導出結論的一個程序或過程。





為了做推論， 我們需要敘述統計、機率分配及抽樣分配的技術和知識。

10.1 估計的概念

有兩種通用的程序用來對母體做推論：

- 估計 (Estimation)
- 假設檢定 (Hypothesis Testing; denoted as HT)

估計的目的是在樣本統計量的基礎上，決定一個母體參數的可能值或**近似值**。

例如： 樣本平均數($\bar{x}$)是用來**估計**母體平均數(μ)。

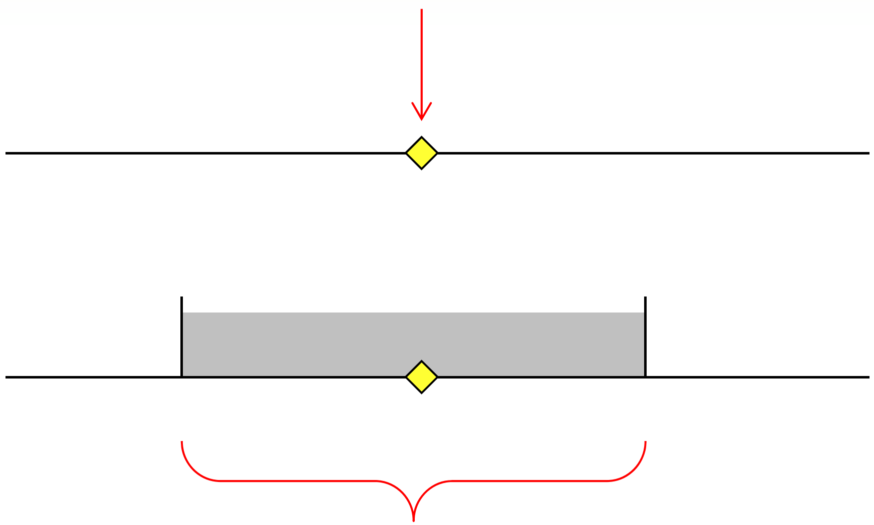
估計式 (Estimator) vs. 估計值 (Estimate)

估計的目的是在樣本統計量的基礎上，決定一個母體參數的**近似值**。

估計量的類型：

1. 點估計式
(point estimator)

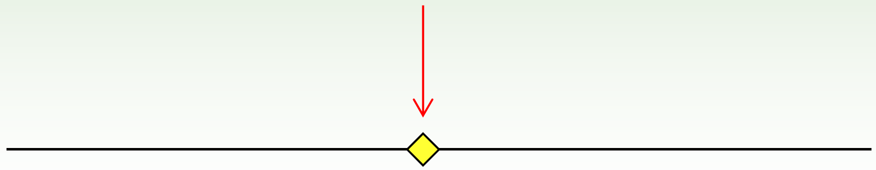
2. 區間估計式
(interval estimator)



Note: In stead of 估計式, 估計量 is used in the text book

點估計式 (point estimator)

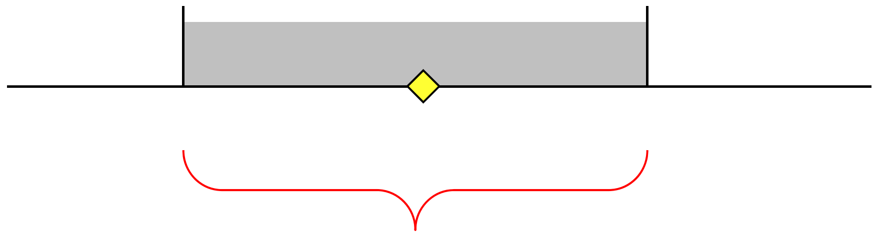
- 一個**點估計式** 藉著單一數值或點來估計母體的未知參數，以便對母體參數進行推論。



- 先前看到連續分配的點機率幾乎是 0。
- 同樣地，我們期望點估計量會依樣本數的增加而更接近參數值。
- 點估計量無法直接反映增加樣本數的效果。
- **藉由區間估計量 (interval estimator)** 反映增加樣本數的效果並估計母體參數。

區間估計式 (interval estimator)

區間估計式藉由一個區間來估計母體未知參數的值，以對母體未知參數進行推論。



這就是我們所說的 (有某些 ___% 確實性) 關注的母體參數在下限及上限的範圍之間。

點估計式與區間估計式

假設一位統計學教授想要估計其商學院二年學生的平均暑期收入。隨機選出25 位學生(n=25)，$\bar{x}$ 計算的樣本平均週薪是$400。

點估計量

區間估計量

另一種說法：

二年級商學院學生暑期的平均週薪是**介於**$\underbrace{\$380 \text{ 與 } \$420}$ 之間。

估計式之品質

- 估計式品質是包括不偏性 (unbiasedness)、一致性 (consistency)、相對有效性 (relative efficiency)：
- 一個母體參數的**不偏估計式 (unbiased estimator)** 是一個**估計式的**期望值會等於參數的估計式。
- 假如隨著樣本大小的增加，估計式與參數間的差異會隨之變小，則此不偏估計式被稱為是**一致的 (consistent)**。
- 如果一個參數有兩個不偏估計式，具有變異數比較小的不偏估計式被稱為是**相對的比較有效 (relatively more efficient)**。

不偏估計式

一個母體參數的不偏估計式 (unbiased estimator) 是一個估計式的期望值會等於參數之估計式。

例：樣本平均數 $\bar{X}$ 是母體平均數 μ 的不偏估計式。
我們敘述：

$$E(\bar{X}) = \mu$$

一致性

- 假如隨著樣本大小的增加，估計式與參數間的差異會隨之變小，則此不偏估計式被稱為是**一致的 (consistent)**。

例：$\bar{X}$ 是 μ 的一個**一致性**估計式，因為：

$$V(\bar{X}) = \sigma^2 / n$$

這表示當 n 增大，$\bar{X}$ 的變異數會變得較小, see Figure 10.1, p355。

相對有效性

- 如果一個參數有兩個不偏估計式，具有變異數比較小的不偏估計式被稱為是**相對的比較有效 (relatively more efficient)**。

例：樣本平均數及樣本中位數都是母體平均數的不偏估計值。然而，樣本中位數擁有比樣本平均數更大的變異數，所以我們選擇 $\overline{x}$ ，因為與樣本中位數比較，**其相對的比較有效**。

因此，樣本平均數 $\overline{x}$ 是母體平均數 μ“最好/佳”估計值。

10.2 在母體標準差已知下，估計母體平均數

在第 8 章中，我們曾發展下列與樣本平均數有關的機率敘述：

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

以及第9章中$\overline{X}$的抽樣分配隨著平均數 μ 與標準差 $\sigma/\sqrt{n}$ 近似常態。

因此

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

是(近似的)標準常態分配。

在母體標準差已知下估計母體平均數

因此，以 Z 代入公式得到

$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

第9.1節中(使用一些代數)，我們曾發展下列與平均數的抽樣分配有關的機率敘述：

$$P\left(\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

使用類似的代數運算，我們可以用稍微不同的形式表達這個機率：

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

在母體標準差已知下估計母體平均數

這項公式：

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

仍然是有關 $\bar{X}$ 的機率描述。

因為它也是 μ 的信賴區間估計量(confidence interval estimator of μ)的描述。

在母體標準差已知下估計母體平均數

信賴區間可以表示成

信賴下限

(Lower confidence limit) = $\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

信賴上限

(Upper confidence limit) = $\bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

機率 1 – α 是信賴水準 (confidence level) ，為測量區間實際包含 μ 的機率。

Note: Table 10.1 (p358) –common values of confidence levels

範例 10.1

- Doll 電腦公司自己製造電腦並且直接運送給透過網路下訂單的顧客。
- 為了達到速度的目標，Doll 製造五種最暢銷的電腦並將其運送到全國各處的倉庫。通常只花一天的時間就可以將存放在倉庫中的電腦運送到顧客的手中。
- 這項策略需要高的庫存標準，而高庫存標準會增加大量的成本。

範例 10.1

- 為了降低成本，作業經理想要使用一個存貨模型。他注意到每日的需求量與前置時間都是隨機變數。並且他必須知道平均數以計算最佳的存貨標準。
- 他觀察了25 段前置期間並記錄每一次期間的需求量。 Xm10-01
- 這位經理想要一個前置期間平均需求量的 95% 信賴區間估計值。這位經理知道標準差是75 部電腦。

範例 10.1

235	374	309	499	253
421	361	514	462	369
394	439	348	344	330
261	374	302	466	535
386	316	296	332	334

範例 10.1

辨識方法

- “為了決定最佳的存貨標準，這位經理必須知道前置期間的平均需求量。”
- 因此，要估計的參數是母體平均數：μ
- 所以，我們的信賴區間估計量將是：

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

範例 10.1

計算

我們需要4 個值以建立 μ 的信賴區間估計值。

$\bar{x}$	370.16
$z_{\alpha/2}$	1.96
σ	75
n	25

計算數據

$1-\alpha = .95, \therefore \alpha/2 = .025$

所以 $z_{\alpha/2} = z_{.025} = 1.96$

已給定

因此：

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 370.16 \pm Z_{.025}\frac{75}{\sqrt{25}} = 370.16 \pm 1.96\frac{75}{\sqrt{25}} = 370.16 \pm 29.40$$

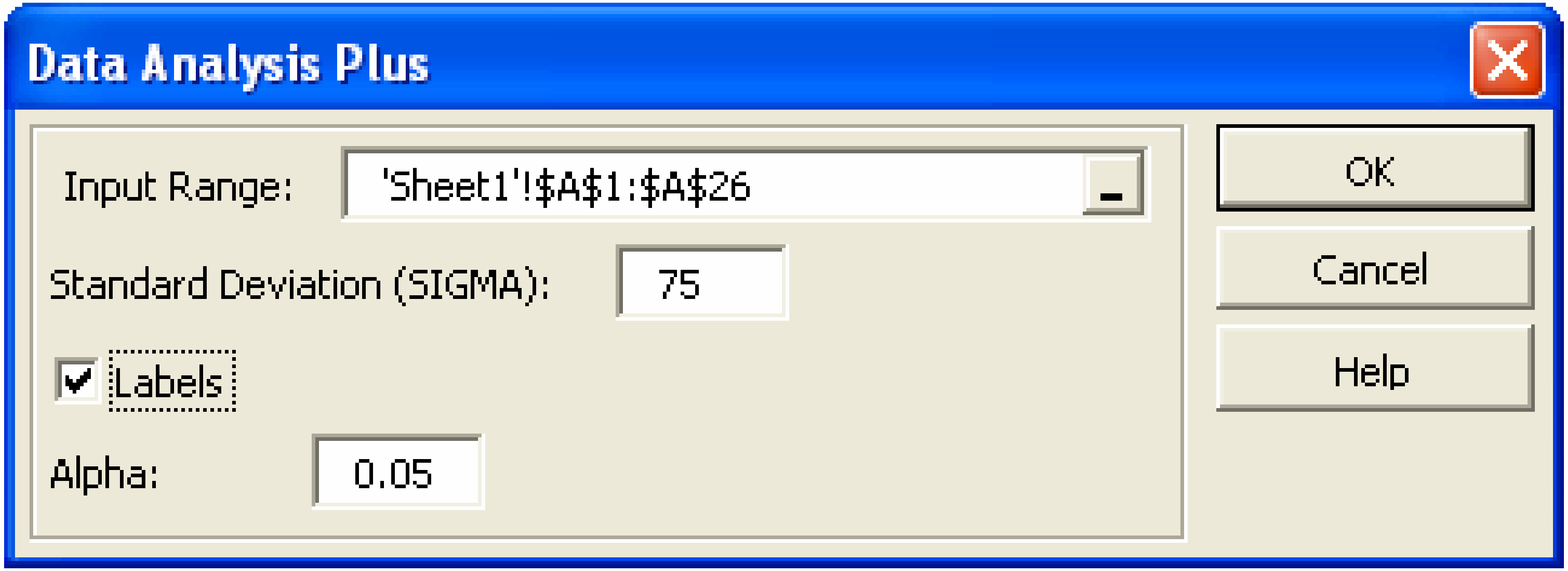
信賴下限與信賴上限分別是 LCL=340.76與 UCL=399.56。

範例 10.1 運用 Excel

計算

利用 Data Analysis Plus™ 工具來計算檔案Xm10-01的數據，我們可以很輕鬆地得到答案。

點選 Add-In 、 Data Analysis Plus ，與 Z-Estimate: Mean



範例 10.1

	A	B	C
1	***z*-Estimate: Mean**		
2			
3			*Demand*
4	Mean		370.16
5	Standard Deviation		80.783
6	Observations		25
7	SIGMA		75
8	LCL		340.76
9	UCL		399.56

詮釋

範例 10.1

- 這位作業經理估計前置期間的平均需求量介於 340.76 與 399.56 之間——在發展存貨策略時，他可以使用這個估計值當做輸入。
- 我們估計前置期間的平均需求量介於 340.76 與 399.56 之間，並且這類的估計式有 95% 正確的機會。意思就是說估計式有 5 %的機會是不正確的。
- 附帶一提，媒體通常指稱 95% 的數據是「20 次中的19 次」，它強調信賴水準的**長期**觀點。

詮釋信賴區間估計值

- 有些人錯誤地詮釋範例10.1 的信賴區間估計值為：有95% 的機率母體平均數會落在340.76 與399.56 之間。
- 這項詮釋是不正確的，因為它暗示著母體平均數是一個變數從而我們可以對它做機率的描述。
- 事實上，母體平均數是一個固定但未知的數量。因此，我們不能詮釋 μ 的信賴區間估計值為 μ 的一個機率描述。

詮釋信賴區間估計值

- 為了適當地解說信賴區間估計值，我們必須記住信賴區間估計式由樣本平均數的抽樣分配所導出。
- 我們使用抽樣分配對樣本平均數做機率的描述。
- 雖然形式已經改變，信賴區間估計式也是樣本平均數的一個機率描述。

詮釋信賴區間估計值

它說明有 1 - α 的機率，樣本平均數將會等於一個數值，使得

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad 到 \quad \left(\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

的區間會包括母體平均數。

一旦樣本平均數被計算出來，該區間成為母體平均數的區間估計值的下限與上限。

詮釋信賴區間估計值

- 舉例而言，假設我們想要從投擲一顆公正骰子的結果，估計其分配的平均值。
- 因為我們知道它的分配，我們也知道 $\mu = 3.5$ 和 $\sigma = 1.71$。
- 假設現在我們只知道 $\sigma = 1.71$，而 μ 是未知的，而且我們想要估計它的值。
- 為了估計 μ，我們選取樣本大小 $n = 100$ 並且計算 $\bar{X}$。μ 的信賴區間估計量是

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

詮釋信賴區間估計值

90% 的信賴區間估計式是

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 1.645\frac{1.71}{\sqrt{100}} = \bar{x} \pm .281$$

Q: How about 95%信賴區間估計式?

詮釋信賴區間估計值

這個符號的意思是，如果我們從母體中重複選取大小為 100 的樣本，90% 的 $\bar{x}$ 值將使得 μ 被包含在

$$\bar{x} - .281 \text{ 與 } \bar{x} + .281$$

而 10% 的 $\bar{x}$ 值將產生不包括 μ 的區間。

現在，想像我們抽出 40 個各含100 個觀測值的樣本。$\bar{X}$ 的值與所得到的 μ 的信賴區間估計值呈現在表 10.2。

資訊與區間寬度

一個寬的區間提供很少的資訊

例如，我們以 95% 的信心估計會計師的平均起薪介於$15,000 與 $100,000之間。

與此相比較: 以 95% 信賴區間估計會計師平均起薪介於$42,000 與 $45,000之間。

第二個估計是窄了很多，可提供會計系學生有關平均起薪更精確的資訊。

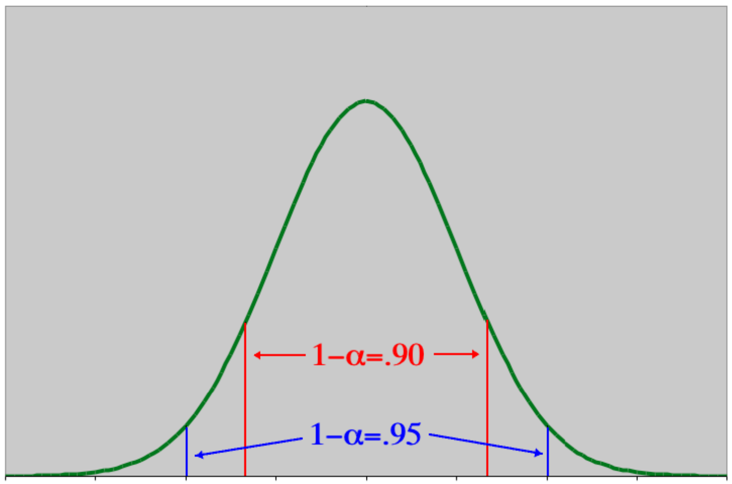
資訊與區間寬度

信賴區間估計值的寬度是信賴水準 (confidence level) 、母體標準差 (population standard deviation)與樣本大小 (sample size) 的函數。

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

較大的信賴水準，意味著較寬的信賴區間。

Estimators.xls

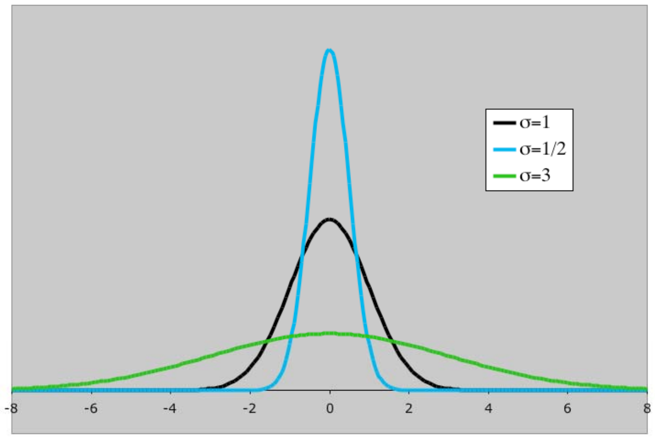


資訊與區間寬度

信賴區間估計值的寬度是信賴水準(confidence level) 、母體標準差(population standard deviation)與樣本大小(sample size)的函度。

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

較高的σ 意味著較寬的信賴區間。Estimators.xls



資訊與區間寬度

信賴區間估計值的寬度是信賴水準(confidence level)、母體標準差(population standard deviation)與樣本大小(sample size)的函度。

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

當信賴水準保持不變，增加樣本大小會縮減區間的寬度。Estimators.xls

注意：增加樣本大小會增加抽樣**成本**。

10.3 選擇樣本大小

第 5 章中， 我們指出抽樣誤差為一個估計量和一個參數之間的差異。

我們也定義這種差異為**估計誤差**。

在本章中，這種差異可以被表達為 $\overline{X}$ 和 μ 之間的差異。

選擇樣本大小

- 估計誤差的界線 (bound on the error of estimation)是

$$B = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{n}$$

使用一些代數我們得到樣本大小用以估計平均值。我們可以對公式中的 n 求解，如果母體標準差 σ、信賴水準1 − α，以及估計誤差的界限 B 皆為已知。為了對 n 求解，我們產生

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{B} \right)^2$$

選擇樣本大小

為了說明，假設在範例 10.1 中，在蒐集資料之前，這位經理決定他必須將前置期間平均需求量的估計值控制在母體平均數的 16 個單位之內，此為估計誤差的界限。

我們也有 $1-\alpha=.95$ 與 $\sigma=75$。計算出

$$n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{B}\right)^2=\left(\frac{(1.96)(75)}{16}\right)^2=84.41$$

選擇樣本大小

因為 n 必須是整數，而且我們想要估計誤差的界線必須不超過 16 ，所以任何非整數的值必須無條件進位。

因此， n 進位之後的數值為 85，其意義是為了要有 95% 的信心去說我們的估計誤差將不會大過 16 ，我們必須隨機抽樣 85 個前置期間。