Ch5 遠期價格與期貨價格的決定

Determination of Forward and Futures Prices

前言

- 本章探討兩種價格的關係：
  - 遠期價格 vs. 現貨價格
  - 期貨價格 vs. 現貨價格
- 探討標的包含：指數、外匯與商品。
- 利率期貨留待下一章討論。

投資財與消費財

- 投資財（Investment Assets）是一種以投資為目的且由許多投資人所擁有。
  - 股票、債券、黃金、銀、、、等
- 消費財（Consumption Assets）是一種以消費為目的的資產，通常不具投資目的。
  - 石油、銅、玉米、黃金、銀、、、等
- 注意：投資財也有可能是消費財。銀雖然有許多工業用途，但也有許多人收藏以作為投資用途。
- 我們可以用套利的概念求得投資財的現貨價格與期貨或遠期價格的關係，但對消費財不適用。

放空 （Short Selling）(1)

- 放空是指賣出一項本身沒有的資產。
- 假設投資人指示經紀商放空 IBM 500 股。則經紀商會向其他客戶預借500 股 IBM 股票，然後在市場上賣出。
- 投資人欲結束放空部位，只須在市場上買回 500 股 IBM 股票歸回即可。
- 股票下跌，放空部位獲利。股票上升，放空部位損失。
- 任何放空股票產生的現金收入，投資人需交給經紀商，以歸還給股票借出者。

放空 （Short Selling）(2)

- 放空交易須在經紀商處有保證金帳戶 (Margin Account)。
- 保證金帳戶有利息。
- 可以使用國庫券當替代品。
- 在美國，只有當股價上漲時，才可以放空，但投資者為了複製指數，可以不受限制。

放空： Example (3)

股票買進	
4月：以每股 $120 的價格買進 500 股股票。	-$60,000
5月：收取股利，每股 $1。	+$500
7月：以每股 $100 賣出 500 股股票。	+$50,000
淨利：	-$9,500

股票的融券放空	
4月：借入 500 股股票，並以每股 $120 的價格賣出。	+$60,000
5月：支付股利每股 $1。	-$500
7月：以每股 $100 買進 500 股股票，並償還結束放空部位。	-$50,000
淨利：	$9,500

台灣銀行：證券信用交易帳戶開立條件說明書 (1)

一、依據「證券商辦理有價證券買賣融資融券管理辦法」第十條訂定。
二、委託人申請開立信用帳戶訂定融資融券契約，除期滿辦理續約者外，應具備下列基本條件：

（一）須為**年滿二十歲**有行為能力之**中華民國國民**，或依中華民國法律組織登記之法人。
（二）開立受託買賣帳戶**滿三個月**。普通戶開立**滿三個月**才可開融資戶。

（三）最近一年內委託買賣成交十筆以上，累積成交金額達所申請融資額度之百分之五十，其開立受託買賣帳戶未滿一年者亦同。

（四）最近一年之所得與各種財產合計達所申請融資額度之百分之三十。

委託人於契約存續期間或滿期辦理續約時，其條件應符合前項第四款之規定，並提供證明文件。第一項第三款及第四款所訂之比率，證券商經評估，認為必要時，得提高之。

台灣銀行：證券信用交易帳戶開立條件說明書 (2)

三、前條第一項第四款所定財產證明以委託人或其配偶、父母、成年子女之下列單據文件為限：

（一）不動產所有權狀影本或繳稅稅單。
（二）最近一個月之金融機構存款證明。
（三）持有三個月以上有價證券之證明。

委託人所提供之財產證明非本人所有者，財產所有人應為連帶保證人。

台灣銀行：
證券信用交易帳戶開立條件說明書 (3)

例如年滿二十歲有行為能力之中華民國國民，欲申請１００萬元之融資融券額度時，應備妥下列文件：

１、需於證券商開立滿３個月以上之股票交割戶(可持集保證券存摺)。

２、前述帳戶至少有５０萬元以上之買賣成交實績，且最近一年需有十筆以上交易(可持最近３個月之對帳單)。

３、檢具申請融資融券30 %(即３０萬元)之財力證明 (最近一個月銀行開立之存款證明或持有集保存摺有價證券)即可。

４、若融資融券開戶滿五戶以上，其30萬元之存款證明需為一個月之平均款餘額。

假設 (Assumptions)

- 本章，我們將在下列條件下進行討論：
  - 沒有交易成本
  - 相同稅率
  - 以無風險利率借貸
  - 無套利機會

符號（Notations）

- T：期貨或遠期合約距離到期日的（年化）時間
- S：期貨或遠期合約標的物的今日價格
- F：今天觀察到的期貨或遠期價格
- r：（連續複利）（年化）無風險利率

投資財的遠期價格

Forward Price for an Investment Asset

討論以下幾種情形的投資財

- 沒有現金流入
- 有已知的現金流入
- 有已知的現金收益率

投資財的遠期價格：沒有現金流入

- 沒有現金流入的投資財：
  - 不支付股利的股票
  - 零息債券。
- 若遠期合約的標的資產是沒有現金流入的投資財，則標的資產的遠期價格與現貨價格有下列關係：

$$\mathbf{F = S \times exp(rT)}$$

舉例證明 (1)

- 假設進入某三個月後到期的遠期合約，其標的資產三個月內不支付任何現金流量。假設今日現貨價(S) $40，無風險利率5%。則今日的遠期價格(F)，應為:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{S \times exp(rT)} \\ &= \mathbf{40 \times exp(0.05 \times 0.25)} \\ &= \mathbf{40.5} \end{aligned}$$

舉例證明 (2)

- **假設：F = $43 (> 40.5) 太高！**
  - 進入遠期合約短部位
  - 以無風險利率 5% 借入 $40，並以借款買入現貨1單位。
  - 三各月後，到期以遠期合約出售資產，得 $43。並歸還本利和： $40 × exp(0.05×0.25) = $40.5。
  - 淨收益：$43 - $40.5 = $2.5。

舉例證明 (3)

- 假設：F = $39 (< 40.5) 太低！
  - 進入該合約長部位
  - 放空1單位資產，收入$40。以無風險利率5% 存款三個月。
  - 三個月後，得本利和： $\$40 \times \exp(0.05\times0.25) = \$40.5$，並依遠期合約以 $39 買入資產1單位以結束放空部位。
  - 淨收益：$40.5 - $39 = $1.5。

17

合理的遠期價格

- 當遠期價格大於 $40.5時，用第一種策略可以套利。
- 當遠期價格小於 $40.5時，用第二種策略可以套利。
- 結論：當遠期價格等於 $40.5時，無套利機會存在，此即為遠期價格的合理價格。
- $F = S \times \exp(rT) = \$40 \times \exp(0.05\times0.25) = \$40.5$。

18

Example:

- 假設有某四月後到期的零息債券遠期合約。此標的零息債券，在一年後到期，目前價格 $ 930。假設無風險利率為 6%。試問目前此債券的遠期價格為何？

$$F = S \times \exp(rT) = 930 \times \exp(0.06 \times 3/12) = \$\ 948.79$$

19

放空非必要！

- 上述結果，是在標的資產可以放空的情形下得到，但並非所有資產皆可以放空。然而，即使標的資產不可以放空，前述結果仍成立。
- 因為投資財的前提是『有許多投資人投資』，所以有許多投資人擁有該資產。因此，當他們發覺遠期價格相對較低時，他們會賣掉現貨，進入遠期合約長部位買回，以進行套利。因此無須進行放空，上述結果仍可成立。
- 因此，P12 的『放空』改成 『賣出』，亦可證明！

20

投資財的遠期價格：有確知的現金流入

- 假設標的資產會發放確知的現金。
  - 股票：已知的股票股利
  - 付息債券：確知的票面利率
- 假設標的資產所發放現金的『現值』以 I 表示，則遠期價格為：

$$F=(S-I)\times \exp(rT)$$

21

例證：(1)

- 某付息債券遠期契約 9 個月後到期，現貨價格 \$900，4 個月後，此債券支付 \$40 利息。 假設 4 個月與 9 個月的無風險利率分別為 3% 與 4%。試問合理的遠期價格應為？

I = 40 × exp(−0.03 × 4/12)= \$39.6。

F = (900 −39.6) × exp(0.04 × 9/12) =\$886.6

22

例證：(2)

- 情境一：遠期價格為 \$910 (>886.6) 太高！
  - 進入遠期合約短部位
  - 借錢買入此債券。
    - 借 \$900 買入債券
    - 因為此債券 4 個月後有確定的 \$40，現值為

      40 × exp(−0.03×4/12) = \$39.6。

      因此可以先貼現。所以只要借 \$900 − \$39.6 = \$860.4
  - 到期時，以遠期契約賣出債券得款 \$910，並歸還本利和 \$860.4 × exp(0.04 × 9/12) = \$886.6。
  - 到期時淨獲利： \$910 − \$886.6 = \$23.4

23

例證：(3)

- 情境二：遠期價格為 \$870 (< 886.6) 太低！
  - 進入遠期合約長部位
  - 放空此債券，得款 \$900。
    - 因為此債券 4 個月後有確定的 \$40 利息，現值為：40 × exp(−0.03×4/12)= \$39.6。因此要先準備 \$39.6，四個月後要支付利息。
    - 只有 \$900 − \$39.6 = \$860.4 可以 4% 存 9 個月。
  - 到期時，依遠期契約以 \$870 買入債券並歸還。獲得本利和 \$860.4 × exp(0.04 × 9/12) =\$886.6。
  - 到期時淨獲利： \$886.6 − \$870 = \$16.6

24

例證: (4)

- 當遠期價格高於 \$886.6，則可以使用策略一進行套利。當遠期價格低於 \$886.6，則可以使用策略二進行套利。因此，在無套利機會存在的情形下，債券遠期價格應為： \$886.6。
- $F = (S - I) \times \exp(rT)$
  $= (900 - 39.6) \times \exp(0.04 \times 9/12)$
  $= \$886.6$

Example

- 假設某股票的現貨價格 \$50，並在 3, 6, 9 個月後支付現金股利 \$0.75。假設無風險利率為 8%。則該股票的 10 個月後的遠期價格為何？
- **I=2.16**
  $= 0.75 \times \exp(-0.08\times3/12) + 0.75 \times \exp(-0.08\times6/12) + 0.75 \times \exp(-0.08\times9/12)$

$F = (50-2.16) \times \exp(0.08 \times 10/12) = \$51.14$

投資財的遠期價格：有確知的收益率

- 假設某遠期契約的標的物，在契約的存續期間有確知的收益率 q，則該標的物的遠期價格應為：

$$F = [S \times \exp(-q \times T)] \times \exp(r \times T)$$
$$= S \times \exp((r-q) \times T)$$

- 證明：See Problem 5.20 !!

Example

- 假設某股票發放連續股利，股利率 $q = 2\%$，股票現貨價為 \$25，無風險利率 $r = 10\%$。試問該股票的六個月遠期價格為何？

$$F = S \times \exp((r-q) \times T)$$
$$= 25 \times \exp((0.1-0.02) \times 6/12)$$
$$= \$25.77$$

評價遠期合約 (Valuing Forward Contract)

- Notation:
  - f ：Value of forward contract today
  - K：Delivery price in the contract
  - F：the forward price today
  - T：the time to maturity
  - r ：the risk-free interest rate
  - S_T: the price of the underlying asset at time T

評價遠期合約 (Valuing Forward Contract) (1)

- 遠期契約一簽訂時，是一公平契約，雙方價值為 0。但經過一段時間後，價值可能為正或為負。
  - 遠期合約長部位到期 Payoff : (S_T -K)
  - 遠期合約長部位到期 Payoff : (K-S_T)
  - 遠期合約長部位價值: $f = (F - K) \times \exp(-rT)$
  - 遠期合約短部位價值: $f = (K - F) \times \exp(-rT)$
- S_T 是資產在到期的市價；F 是在評價時，市場對資產在時間 T 的價值的預期。

評價遠期合約 (Valuing Forward Contract) (2)

- 遠期合約長部位價值: $f = (F - K) \times \exp(-rT)$
- 遠期合約短部位價值: $f = (K - F) \times \exp(-rT)$
- 遠期價格 F 公式：
  - 沒有現金流入：$F = S \times \exp(rT)$
  - 有已知的現金流入：$F = (S-I) \times \exp(rT)$
  - 有確知的收益率 ：$F = S \times \exp((r-q) \times T)$

評價遠期合約 (Valuing Forward Contract) (3)

- 遠期合約長部位價值: $f = (F - K) \times \exp(-rT)$
  - 沒有現金流入： $f = S - K \times \exp(-rT)$
  - 有已知的現金流入： $f = S – I - K \times \exp(-rT)$
  - 有確知的收益率 ： $f = S \times \exp(-qT) - K \times \exp(-rT)$
- 遠期合約短部位價值: $f = (K - F) \times \exp(-rT)$
  - 沒有現金流入： $f = K \times \exp(-rT) -S$
  - 有已知的現金流入： $f = K \times \exp(-rT) – S +I$
  - 有確知的收益率 ： $f = K \times \exp(-rT) - S \times \exp(-qT)$

Example

- 某遠期契約標的資產為不發放股利的股票，此契約尚有 6 個月到期，契約交割價格為 $24。假設今日股票價格為 $25，無風險利率 10%。則此契約長部位價值為何？

$$F = S \times \exp(rT) = 25 \times \exp(0.1 \times 0.5) = 26.28$$

$$\begin{aligned} f &= (F - K) \times \exp(-rT) \\ &= (26.28 - 24) \times \exp -0.1 \times 6/12) \\ &= 2.28 \times \exp(-0.1 \times 6/12) \\ &= \$\ 2.17 \end{aligned}$$

33

Business Snapshot 5.2 (1)

- See P 107.
- 期貨每天的收益：期貨價差 （每日結算）
- 遠期契約每天的收益：遠期價格與交割價格的價差的現值 （到期一次結算，所以今日的收益，是到期收益的折現值）

34

Business Snapshot 5.2 A systems error?

A foreign exchange trader working for a bank enters into a long forward contract to buy 1 million pounds sterling at an exchange rate of 1.9000 in three months. At the same time, another trader on the next desk takes a long position in 16 three-month futures contracts on sterling. The futures price is 1.9000 and each contract is on 62,500 pounds. The positions taken by the forward and futures traders are therefore the same. Within minutes of the positions being taken the forward and the futures prices both increase to 1.9040. The bank's systems show that the futures trader has made a profit of $4,000 while the forward trader has made a profit of only $3,900. The forward trader immediately calls the bank's systems department to complain. Does the forward trader have a valid complaint?

The answer is no! The daily settlement of futures contracts ensures that the futures trader realizes an almost immediate profit corresponding to the increase in the futures price. If the forward trader closed out the position by entering into a short contract at 1.9040, the forward trader would have contracted to buy 1 million pounds at 1.9000 in three months and sell 1 million pounds at 1.9040 in three months. This would lead to a $4,000 profit—but in three months' time. The forward trader's profit is the present value of $4,000. This is consistent with equation (5.4).

The forward trader can gain some consolation from the fact that gains and losses are treated symmetrically. If the forward/futures prices dropped to 1.8960 instead of rising to 1.9040 the futures trader would take a loss of $4,000, while the forward trader would take a loss of only $3,900.

Forward Prices = Futures Prices ???

- 當利率變動過程是可預知的 （Deterministic），則期貨價格等於遠期價格。
- 當利率變動過程是隨機的 （Stochastic），則期貨價格不等於遠期價格。
  - 當利率與標的資產價格成正相關時：

    期貨價格大於遠期價格
  - 當利率與標的資產價格成負相關時：

    期貨價格小於遠期價格

36

Forward Prices = Futures Prices ???

- **當利率與標的資產價格成正相關時：期貨價格大於遠期價格**
  - **S：標的資產價格**
  - **F：遠期價格**
  - **f：期貨價格**
  - **R：利率**
- 說明：
  - S↑ ➔ r↑，期貨與遠期契約的長部位獲利，然而期貨因逐日結算機制，可以立即獲得現金，並以較高的 r 存款。
  - S↓ ➔ r↓，期貨與遠期契約的長部位損失，然而期貨因逐日結算機制，須立即回補保證金，但可以較低的 r 借得現金回補。
  - 因此，購買未來商品以『期貨契約』購買較以『遠期契約』佳，因此期貨的需求量增加，故期貨價格高於遠期價格。

Forward Prices = Futures Prices ???

- 一般來說，當到期日不長時（幾個月），則期貨與遠期契約的價差很小，可以忽略。
- 本書除非特別說明，否則將期貨與遠期契約視為相同。
- 除了利率與兩者契約的不同性質外，尚有一些因素會影響兩者的價差：
  - Taxes
  - transaction Costs
  - Treatment of Margins
  - Default Probability
  - Liquidity

股票指數期貨價格 (Futures Prices of Stock Indices)

- 股票指數可以視為一種會發放現金的投資財。
- 假設股票指數的股利率為 q，則股票的期貨價格為：$F = S \times \exp((r-q) \times T)$。
  - $r > q$: T 與 F 同向
  - $r < q$: T 與 F 反向

Example

- 假設今日 S&P 500 指數為 800，股利收益率 q=1%，無風險利率 r=6%。則三個月的 S&P 500 期貨價格為何？

$$F = 800 \times \exp((0.06-0.01) \times 3/12)$$
$$= \$810.06$$

指數套利 (Index Arbitrage)

- 套利交易一般用程式交易 (Program Trading) 進行。
- $F > S \times \exp((r-q) \times T)$
  - 進入期貨短部位，購買指數的成分股。
  - 由持有短期貨幣市場投資部位的公司進行。
- $F < S \times \exp((r-q) \times T)$
  - 進入期貨長部位，放空指數的成分股。
  - 通常由退休基金進行，因為他們擁有很大的股票投資組合。

41

外匯期貨與外匯遠期契約

(Forward and Futures Contracts on Currencies)

- 因為持有外幣有利息收入，所以外幣可以視為發放現金收益的投資財。
- 假設期貨或遠期契約的標的貨幣的無風險利率為 r_f，今日匯率為 S ，則該貨幣的期貨（遠期）價格為：

$$F = S \times \exp((r - r_f) \times T)$$

42

證明：$F = S \times \exp((r - r_f) \times T)$

- 假設某投資人擁有1000單位的外幣，有兩種方法可以在一年後，將他換成美元（本國貨幣）。
  - 將 1000 外幣以外國無風險利率定存，並進入遠期合約短部位，到期以匯率 F 將他換成美金。

$$1000 \times \exp(r_f\ T) \times F$$

  - 將 1000 外幣馬上轉成美元，並以美元無風險利率存一年。

$$1000 \times S \times \exp(r\ T)$$

43

證明： $F = S \times \exp((r - r_f) \times T)$

- 在無套利機會下兩者應該相同：

$$1000 \times \exp(r_f\ T) \times F = 1000 \times S \times \exp(rT)$$

$$\Rightarrow \quad F = S \times \exp((r - r_f) \times T)$$

44

Example

- Suppose that two-year int. rate in Australia and the Unite States are 5% and 7%. The spot exchange rate is 0.62 USD per AUD.

  The two-year forward exchange rate should be

  $$F = S \times \exp((r-q) \times T)$$
  $$= 0.62 \times \exp((0.07-0.05) \times 2)$$
  $$= 0.6453$$

45

Example

- If not, there exists an arbitrage opportunity.
- If the 2-year forward exchange rate is 0.66 (Too High) :
  - Borrow 1000 USD at 7% for 2 years, convert to 1000/0.62 =1612.9 AUD and invest the AUD at 5%.
  - 2 years later, get 1612.9 $\times$ exp(0.05 $\times$ 2) =1782.53 AUD
  - Enter into forward contract to sell 1782.53 AUD for 1782.53 $\times$ 0.66 = 1176.47 USD.
  - Pay 1000 $\times$ exp(0.07 $\times$ 2) =1150.27 USD for the borrowing.
  - Net Income = 1176.47 – 1150.27 = $ 26.2

46

Example

- If the 2-year forward exchange rate is 0.63 (Too Low) :
  - Borrow 1000 AUD at 5% for 2 years, convert to 1000 $\times$ 0.62 =620 USD and invest the USD at 7%.
  - 2 years later, get 620 $\times$ exp(0.07 $\times$ 2) = 713.17 USD
  - 2 years later, we need to pay 1000 $\times$ exp(0.05 $\times$ 2) =1105.17 AUD for the borrowing.
  - Enter into forward contract to buy 1105.17 AUD that equal to 1105.17 $\times$ 0.63 = $ 696.26
  - Net Income = 713.17 – 696.26 = $ 16.91

47

r vs. r_f (See Table 5.4 on P113.)

- $F = S \times \exp((r - r_f) \times T)$
  - 當本國利率 (r) 大於外國利率 (r_f) 時，則 F 與 T 同向變動。
    - Japanese, British Pound, Canadian Dollar, Swiss Franc, Euro
  - 當本國利率 (r) 小於外國利率 (r_f) 時，則 F 與 T 反向變動。
    - Australian Dollar, Mexican Peso,

48

r vs. r_f (See Table 5.4 on P113.)

Currency Futures

Japanese Yen (CME)-¥12,500,000; $ per 100¥						
March	.8505	.8546	.8494	**.8501**	-.0010	275,923
June	.8603	.8643	.8593	**.8599**	-.0010	5,516
Canadian Dollar (CME)-CAD 100,000; $ per CAD						
March	.8541	.8549	.8503	**.8525**	-.0018	155,395
June	.8566	.8569	.8528	**.8549**	-.0018	2,830
British Pound (CME)-£62,500; $ per £						
March	1.9308	1.9410	1.9265	**1.9382**	.0074	134,588
June	1.9326	1.9403	1.9266	**1.9377**	.0074	178
Swiss Franc (CME)-CHF 125,000; $ per CHF						
March	.8146	.8158	.8105	**.8138**	-.0007	70,774
June	.8207	.8219	.8170	**.8200**	-.0007	168
Australian Dollar (CME)-AUD 100,000; $ per AUD						
March	.7775	.7808	.7766	**.7783**	.0012	116,717
June	.7763	.7784	.7746	**.7762**	.0012	227
Mexican Peso (CME)-MXN 500,000; $ per 10MXN						
Jan	...	...	...	**.91250**	-.00100	0
March	.90700	.91150	.90700	**.91025**	-.00100	69,631
Euro (CME)-€125,000; $ per €						
March	1.3051	1.3078	1.3013	**1.3061**	.0009	174,877
June	1.3079	1.3123	1.3061	**1.3106**	.0009	1,453

商品期貨 (Futures on Commodities)

- 分兩部分討論：
  - 商品是投資財也是消費財
    - 金、銀
  - 商品純是消費財
    - 玉米、小麥

投資財商品期貨

- 一般商品有儲藏成本（Storage Cost）。
- 假設 U 表示所有儲藏成本的折現和。
- 商品的遠期價格為：

$$F = (S + U) \times \exp(r \times T)$$

Example

- Consider a one-year futures contract on gold. We assume no income and that it costs $2 per ounce per year to store gold, with the payment being made at the end of the year. Assume that the spot price is $450 and the risk-free is 7% per annum for all maturities.
- The present value of the storage cost is

$$U = 2 \times \exp(-0.07 \times 1) = 1.865$$

- The theoretical futures price is

$$F = (450 + 1.865) \times \exp(0.07 \times 1) = \$484.63$$

- If actual gold futures price is greater than $484.63, an arbitrageur can buy gold and short one-year gold futures contracts to lock in a profit. If the actual gold futures price is less than 484.63, an investor who already owns gold can improve the return by selling the gold and buying gold futures contracts.

另一種計算儲藏成本的方法

- If the storage costs incurred at any time are proportional to the price of the commodity, they can be treated as negative yield, denoted as u.

$$F = S \times \exp((r+u) \times T)$$

where u denotes the storage costs per annum as a proportion of the spot price.

53

消費財商品期貨

- **若消費財也是投資財**，且儲藏成本 U，則期貨價格：

$$F = (S + U) \times \exp(rT)$$

- 若 $F > (S + U) \times \exp(rT)$，則
  - 以無風險利率借 (S+U)，購買一單位商品，並支付儲藏成本 U。
  - 進入期貨短部位。
  - 到期歸還本利和，尚獲利 $F - (S + U) \times \exp(rT)$ 。
- 若 $F < (S + U) \times \exp(rT)$，則
  - **已持有消費財的投資人**出售消費財，省下儲藏成本省，將得款 (S+U) 以無風險利率存。
  - 進入期貨長部位。
  - 到期以 F 購回商品，獲利： $(S + U) \times \exp(rT) - F$。

54

Example

- 假設黃金現貨價每盎司 $450。無風險利率 7%。儲藏成本每盎司 $2，到期支付。
- 假設一年期黃金期貨價格 $500（Too High），則可以進行套利：
  - 以無風險利率借 $ 45,000，購買 100 盎司黃金。
  - 進入黃金期貨短部位。
  - 到期獲利： $50{,}000 - 45{,}000 \times \exp(0.07\times1) - 200 = \$1{,}537$
- 假設一年期黃金期貨價格 $470（Too Low），則可以進行套利：
  - **已持有黃金的投資人**，可以出售黃金，並省下儲藏成本。
  - 進入期貨長部位 。
  - 到期獲利： $45{,}000 \times \exp(0.07\times1) + 200 - 47{,}000 = \$1463$

55

消費財 vs. 投資財

- 上述證明的第二部分，已持有消費財的投資人不見得願意出售已持有的消費財。例如：生產金飾的工廠，當他發現黃金現貨相較期貨價格高時，他可能不願意出售黃金並進入期貨長部位以進行套利。因為，黃金是生產原料，一旦當黃金不足時，無法用期貨長部位替代。因此第二部分證明，可能會有問題。
- 若消費財也是投資財，則會有一部份的投資人，是以投資為目的持有，而非以生產為目的持有，此時第二部分的套利仍可以進行。故遠期價格公式仍成立，$F = (S + U) \times \exp(rT)$。
- 若消費財並非投資財時，則第二部分證明不成立。因此，遠期價格與現貨價格的關係為： $F \leqq (S + U) \times \exp(rT)$。

56

消費財商品期貨

- 因為持有消費財的**便利性**，遠期價格與現貨價格的關係較特殊。整理如下：
- 投資財： $F = S \times \exp(rT)$。
- 消費財：
  - 消費財 也是投資財：
    $F = (S + U) \times \exp(rT)$。
  - 消費財非投資財：
    $F \leqq (S + U) \times \exp(rT)$。

57

便利收益率 （Convenience Yield）

- 便利收益率可以用來衡量持有現貨相較持有期貨長部位，所獲得的便利性。
- 當期貨標的是消費財時，期貨與現貨價格的關係為： $F < (S + U) \times \exp(rT)$。
- 以 y 表示便利收益率，則 y 使得下式成立

$F \times \exp(yT) = (S + U) \times \exp(rT)$

➔ $F = (S + U) \times \exp((r-y) \times T)$

➔ $F = S \times \exp((r + u - y) \times T)$

58

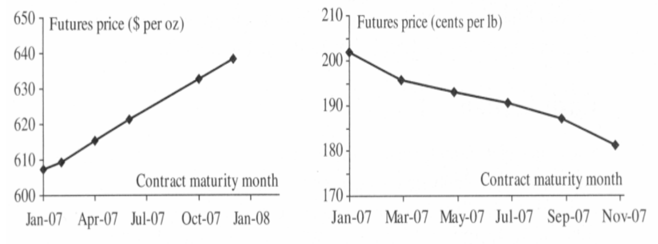
便利收益率 （Convenience Yield）

- $F = S \times \exp((r + u - y) \times T)$
  - y 越大 ←➔ 持有現貨便利性越高
  - y 越小 ←➔ 持有現貨便利性越低
- See Fig. 2.2 on P34. 期貨價格是到期日的遞減函數。這隱含了 $y > (r + u)$。表示當時的便利收益率很高，因此對未來柳橙汁短缺的預期很強烈，所以持有柳橙汁現貨的意願強烈。

59

Fig. 2.2 on P33.

Figure 2.2 Settlement futures price as a function of contract maturity on January 8, 2007, for (a) gold and (b) orange juice



(a) Gold　　(b) Orange juice

60

持有成本 (Cost of Carry)

- 我們可以將期貨價格與現貨價格的關係，用持有成本來解釋： $F = S \times \exp(cT)$。
- 買一件商品，可以選擇**現在買**或**稍後再買**。現在買可以馬上持有，但多了一些持有的成本。
  - 利息： 稍後買，可以賺取這段時間的利息。但如果是外幣，稍後買又損失了這段時間的外幣利息。
  - 儲藏成本：稍後買，可以省下這段時間的儲藏成本。

61

持有成本 (Cost of Carry)

- 現貨不發放現金，持有成本僅有無風險利息: $c = r$

  $F = S \times \exp(cT) = S \times \exp(rT)$。
- 現貨發放現金 (股票股利或外幣利息)，持有成本為： $c = r - q$

  $F = S \times \exp(cT) = S \times \exp((r - q) \times T)$。
- 現貨發放現金，且有儲藏成本，則持有成本：

  $c = r - q + u$

  $F = S \times \exp(cT) = S \times \exp((r - q + u) \times T)$。

62

交割日期的選擇 (Delivery Options)

- 遠期合約的交割日期是在到期日當天。然而，期貨合約的到期日，是在交割期間的任一天，因此無法確定到期日的日期。
- 期貨到期日無法確定，因此無法對契約的期貨價格進行評價。
- 對一個理性的期貨短部位投資人而言，可以判斷他進行交割的日期：
  - 當 $c > y$ 時，表示持有現貨的成本**大於**持有現貨的便利性，因此會盡可 能提早交割。所以期貨到期日會是交割期間的第一天。**(趕快賣！)**
  - 當 $c < y$ 時，表示持有現貨的成本**小於**持有現貨的便利性，因此會盡可能延遲交割。所以期貨到期日會是交割期間的最後一天。**(慢點賣！)**

63

Exercise

- 3,4,9,10,11,12,14,23

64