Estimation and Confidence Intervals

Chapter 9

統計估計 (Statistical Estimation)

- 統計估計是用樣本統計量推估母體參數的方法。
- 統計估計分為兩部分：
  - 點估計 (Point Estimation)
    ---- 利用樣本統計量直接推估母體參數稱之。例如： Sample Mean $\overline{X}$ ➔ Population Mean μ
  - 區間估計 (Interval Estimation)
    ---- 利用樣本統計量估計出一個區間去估計母體參數，此區間可靠度可知。例如：馬英九支持率在 95% 的信賴水準下，介於 [25%, 30%]。

點估計 （Point Estimation）

Point Estimate (點估計)

- A point estimate is the statistic, computed from sample information, which is used to estimate the population parameter.
- Examples:

Sample Mean $\overline{X}$ ➔ Population Mean μ
Sample Standard Error s ➔ Population Standard Deviation σ
Sample proportion p ➔ Population proportion π

Point Estimate (點估計)

- 用來估計母體參數的統計量稱為估計式 (Estimator)。將樣本觀察值代入估計式中，求得的數值稱為估計值 (Estimate)。
- 點估計步驟：
  1. 抽取代表性樣本
  2. 選擇一個較佳的樣本統計量當估計式
  3. 計算估計式的估計值
  4. 以該估計值推論母體參數並作決策

5

點估計的限制

- 點估計與母體參數的真值通常不同，而使用點估計來推估母體參數的準確性亦無法得知。也許剛好估中，也許相差甚多。因此，點估計誤差大小的不確定性，便是點估計的限制。
- 點估計準確與否，與選擇的估計式是否具良好的特質有關。例如：估計母體平均數，可以選擇的估計式有：樣本平均數、中位數、眾數等，準確與否端視母體特性。

6

區間估計 (Interval Estimation)

McGraw-Hill/Irwin

區間估計 (Interval Estimation)

- 點估計無法提供任何有關估計母體參數的準確性的訊息。為了解決此問題，乃發展出區間估計。
- 區間估計：

  ---- 對未知母體參數估計出一個區間，並指出該區間包含母體參數的信賴程度。
- 信賴區間 (Confidence Interval)：

  ---- 信賴區間是在一給定的信賴水準下，由樣本統 計量與抽樣誤差所構成的一個區間。
- 信賴水準 (Confidence Level)：

  ---- 信賴水準是指信賴區間包含母體參數的信賴度。

8

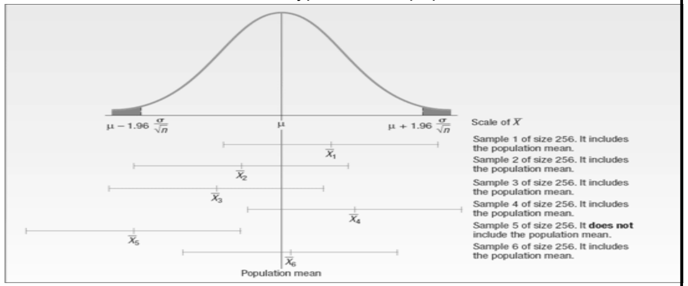
區間估計 (Interval Estimation)

- 區間估計是先對未知的母體參數求點估計值，然後在一信賴水準 (Confidence Level) 下，導出一個上下區間，此區間稱為信賴區間 (Confidence Interval)。信賴水準是指該區間包含母體參數的可靠度。
- 95% 信賴區間表示，做100 次信賴區間，區間約包含母體參數 95 次。

9

Interval Estimates - Interpretation

For a 95% confidence interval about 95% of the similarly constructed intervals will contain the parameter being estimated. Also 95% of the sample means for a specified sample size will lie within 1.96 standard deviations of the hypothesized population



10

Review of Normal Distribution

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ and $Z \sim N(0,1)$

P(Z > a) = P(Z < -a) = 1 - P(Z < a) = 1- P(Z > - a)

$$P(X > a) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{a-\mu}{\sigma}) = P(Z > \frac{a-\mu}{\sigma})$$

Z_α is defined by $P(Z > Z_\alpha) = \alpha$.

$Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$

11

母體平均數的區間估計

McGraw-Hill/Irwin

母體平均數的區間估計

- 探討母體平均數區間估計時，分為下列情形：
  - 大樣本 (n ≧ 30)
    - 母體 σ 已知
    - 母體 σ 未知
  - 小樣本 (n ≦ 30)
    - 常態母體 σ 已知
    - 常態母體 σ 未知
    - 非常態母體 σ 已知
    - 非常態母體 σ 未知

13

母體平均數的區間估計：大樣本、 σ 已知

在大樣本下，由中央極限定理可知：$\overline{\mathrm{X}} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$。

因此， $P\left(\left|\dfrac{\overline{\mathrm{X}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ ，

$\Leftrightarrow P\left(-Z_{\alpha/2} \le \dfrac{\overline{\mathrm{X}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ ，

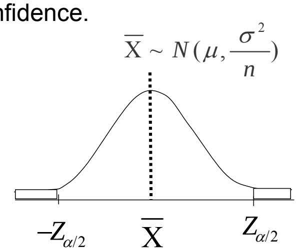
$\Leftrightarrow P\left(\overline{\mathrm{X}} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{\mathrm{X}} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$ ，

$1\text{-}\alpha$ 信賴區間爲： $\overline{\mathrm{X}} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{\mathrm{X}} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

14

Level of Confidence

- $1\text{-}\alpha$ is called the level of confidence.
- Level of Confidence:
  - $1\text{-}\alpha$ = 0.95 or 95%
    $Z_{0.025} = 1.96$
  - $1\text{-}\alpha$ = 0.90 or 90%
    $Z_{0.05} = 1.645$
  - $1\text{-}\alpha$ = 0.99 or 99%
    $Z_{0.05} = 2.575$



$1-\alpha$ Confidence Interval: $\overline{\mathrm{X}} \pm Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

15

影響信賴區間長度的因素

- 影響信賴區間長度的方法有二：
  - 信賴係數 $1\text{-}\alpha$：
    ---- 信賴係數越大，區間長度越長。
  - 樣本數
    ---- 樣本數越大，區間長度越短。
- 區間長度越短，精確度越高。
  - 降低信賴係數雖可以使區間變短，但可靠度降低，不是好方法。
  - 增加樣本數可以使區間變短，增加精確度。

$$\left[\overline{\mathrm{X}} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{\mathrm{X}} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

16

Example 1: 老人看電視的時間 (1)

根據行政院主計處調查，台灣地區15歲以上的人口中，以老年人(65歲以上)看電視的時間最長。現在新立傳播公司計畫推出老年人的電視節目，因此想要了解老年人看電視的時間，以決定電視節目的數量。新立公司於是採隨機抽樣法抽取台北市100位老人調查看電視的時數，結果得知，每星期看電視的平均時間為＝ 21.2小時。假設根據過去數次調查的資料，已知每星期看電視時間的標準差為8小時，問：

1. 老人每星期看電視的平均時間的點估計值為何？
2. 在95%信賴水準下，最大估計誤差為何？
3. 在95%信賴水準下，每星期看電視平均時間的信賴區間為何？

17

Example 1: 老人看電視的時間 (2)

依題意，信賴水準為95%，$\bar{X}$ =21.2小時，σ =8小時， n =100。估計步驟如下：

1. 選擇 $\bar{X}$ 做為 μ 的估計式。
2. 在大樣本情況下，$\bar{X}$ 的抽樣分配為常態分配 $N \sim (\mu, \sigma_{\bar{X}}^2)$。由常態分配可知 $P(|\bar{X}-\mu| \le 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$

。意即在95%信賴水準下，樣本平均數與母體平均數的估計誤差不會超過 $1.96\sigma_{\bar{X}}$ 。因

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0.8$$

因此可知在 $|\bar{X}-\mu| \le 1.96 \times 0.8 = 1.568$ ，意即在 95% 信賴水準下，最大估計誤差為 1.568小時。

18

Example 1: 老人看電視的時間 (3)

3. 在 $1-\alpha$ 信賴水準下，母體平均數的信賴區間為：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$$

因 $\alpha = 0.05$ ，$\alpha/2 = 0.025$ ，查表得 $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$ 。
將 $\sigma_{\bar{X}} = 0.8$ 、$Z_{\alpha/2} = 1.96$ 及 $\bar{X} = 21.2$ 代入上式可得

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 21.2 \pm 1.96 \times 0.8$$
$$= (21.2 - 1.568) \sim (21.2 + 1.568)$$
$$= 19.632 \sim 22.768$$

即 $19.632 \le \mu \le 22.768$

19

Example 1: 老人看電視的時間 (4)

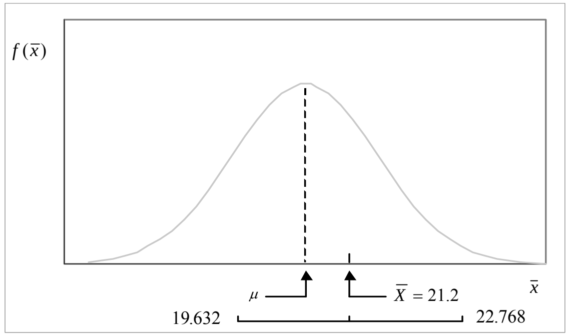
此即表示在 19.632~22.768 小時的區間包含母體平均數 μ 的信賴區間水準為95%。

因此可推論：

「老年人每星期平均看電視的時間在 19.632~22.768 小時之間，而此一區間的可信度(信賴水準)為 95%。」

20

Example 1: 老人看電視的時間 (5)



Example 2：老人看電視的時間 (1)

承 Example 1『老人看電視的時間』，試問：

1. 現若將信賴水準降為90%，信賴區間將為何？較95%信賴區間時寬？還是窄？

2. 信賴水準是95%時，若樣本數增加為400人，信賴區間將為何？較100人時為寬？還是窄？(假設抽樣結果 =21.2小時)

Example 2：老人看電視的時間 (2)

1. 由 Ex1可 知，$\bar{X} = 21.2$ 小時，$\sigma = 8$ 小時，$\sigma_{\bar{X}} = 0.8$ 小時，$n = 100$。信賴區間降為90% 時，$\alpha = 0.1$ $\alpha / 2 = 0.05$
   查表得 $Z_{\alpha/2} = Z_{0.05} = 1.645$，90% 信賴區間為：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 21.2 \pm 1.645 \times 0.8$$

或表為

$$21.2 - 1.645 \times 0.8 \le \mu \le 21.2 + 1.645 \times 0.8$$
$$19.884 \le \mu \le 22.516$$

因此知，90%信賴水準時，信賴區間為19.884~22.516小時。較95%信賴區間時為窄。

Example 2：老人看電視的時間 (3)

2. 當樣本數增為 n=400時，樣本標準差為 $\sigma_{\bar{X}} = 8/\sqrt{400} = 0.4$

因此信賴區間為：$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 21.2 \pm 1.96 \times 0.4$

或表為 $21.2 - 1.96 \times 0.4 \le \mu \le 21.2 + 1.96 \times 0.4$

$$20.416 \le \mu \le 21.984$$

在信賴水準95%下，比較可知，若樣本數增加為400人，信賴區間較100人時為窄。此即表示，當信賴水準固定時，增加樣本數會使信賴區間長度降低，估計的精確度提高。這樣的結果說明為什麼統計學家認為樣本數越大越好的原因。

母體平均數的區間估計：大樣本、 σ 未知

- 當 σ 未知時，以樣本標準差 S 替代母體標準差 σ 。

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}}$$

- 母體平均數 $\bar{X}$ 的 1- α 信賴區間為：

$$\left[\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

25

Example 3

- 某公司隨機抽 50 位員工觀察其年資 X，得到數據 $\sum X=300$、$\sum X^2=2500$。試求公司員工的平均年資的 95% 信賴區間 。

$$S^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{50-1}=\frac{\sum X_i^2-n\bar{X}^2}{50-1}$$

$$=\frac{2500-50\times 6^2}{49}=14.286$$

$$\left[\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]=\left[6-1.96\sqrt{\frac{14.286}{50}},\ 6-1.96\sqrt{\frac{14.286}{50}}\right]$$

26

母體平均數的區間估計：小樣本、常態母體、 σ 已知

常態母體，在小樣本情形下，：$\bar{X}\sim N(\mu, \sigma^2/n)$。

因此， $P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le Z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$ ，

$\Leftrightarrow P\left(-Z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$ ，

$\Leftrightarrow P\left(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$ ，

1-α 信賴區間爲： $\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

27

Example 4: 女鞋價格估計

根據市場調查得知，25 雙流行女鞋的平均價格 2810 元，標準差 696 元。問今年添購一雙流行女鞋平均價格的 95% 的信賴區間為何？（假設母體為常態分配且 σ = 720元。）

已知女鞋價格成常態分配，且已知變異數 σ= 720。

小樣本 n = 25，樣本平均數 $\bar{X}$ =2810，則母體平均數 μ 的 95% 信賴區間爲：

$$\bar{X}\pm Z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2810\pm 1.96\frac{720}{\sqrt{25}}=2810\pm 282$$

即 $2528\le\mu\le 3092$

因此，在 95% 的信賴水準下，一雙流行女鞋的平均價格介於 2528 元至 3092 元之間。

28

母體平均數的區間估計：小樣本、常態母體、 σ 未知

常態母體，在小樣本且母體標準差 σ未知情形下，以樣本標準差 S 替代母體標準差 σ，此時 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 的機率分配爲自由度 (Degree of Freedom) n-1 的 t 分配。

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad , \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}$$

29

Characteristics of the t-distribution

1. It is, like the *z* distribution, a continuous distribution.
2. It is, like the *z* distribution, bell-shaped and symmetrical.
3. There is not one t distribution, but rather a family of t distributions. All *t* distributions have a mean of 0, but their standard deviations differ according to the sample size, *n.*
4. The t distribution is more spread out and flatter at the center than the standard normal distribution As the sample size increases, however, the *t* distribution approaches the standard normal distribution,

30

Comparing the z and t Distributions when *n* is small

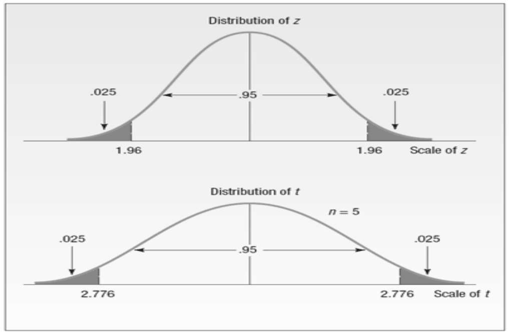


CHART 9–2 Values of z and t for the 95 Percent Level of Confidence

31

t 值表

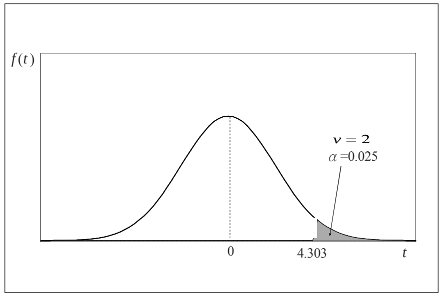
- t 值會因不同的自由度而不同！！

d.f.	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	*d.f.*
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	$\boxed{4.303}$	6.965	10.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	$\boxed{2.015}$	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.575	∞

32

t 值

- $P(t_n > t_{n,\alpha}) = \alpha$ 且 $t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}$
- $t_{5,0.05} = 2.015$
- $t_{2,0.025} = 4.303$
- $t_{15,0.05} =$
- $t_{25,0.25} =$



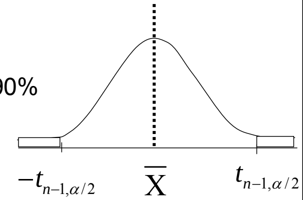
33

Level of Confidence

- $1-\alpha$ is called the level of confidence. .
- Level of Confidence = 0.95 or 95%

  $t_{30,0.025} = 2.042$
- Level of Confidence = 0.9 or 90%

  $t_{30,0.05} = 1.697$



$1-\alpha$ Confidence Interval: $\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

34

母體平均數的區間估計：小樣本、常態母體、 σ 未知

常態母體，在小樣本且 σ未知 情形下， $:\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$。

因此， $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \le t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ ，

$\Leftrightarrow P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$ ，

$\Leftrightarrow P\left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$ ，

1-α 信賴區間爲： $\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

35

Ex. 5 (1)

A tire manufacturer wishes to investigate the tread life of its tires. A sample of 10 tires driven 50,000 miles revealed a sample mean of 0.32 inch of tread remaining with a standard deviation of 0.09 inch. Construct a 95 percent confidence interval for the population mean.

Given in the problem :
$n = 10$
$\bar{x} = 0.32$
$s = 0.09$

Compute the C.I. using the t - dist. (since σ is unknown)
$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

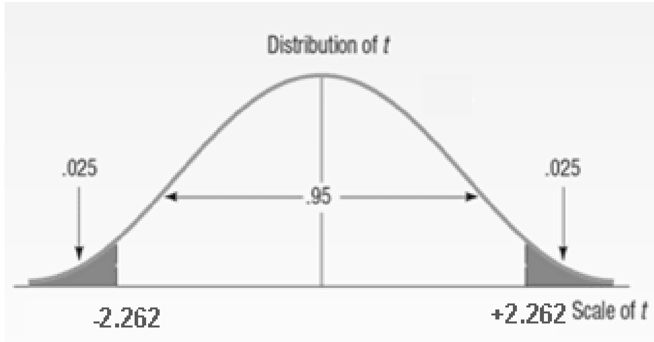
36

Ex. 5 (2)

	Confidence Intervals				
	80%	90%	95%	98%	99%
	Level of Significance for One-Tailed Test				
df	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
	Level of Significance for Two-Tailed Test				
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	$\boxed{2.262}$	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169

37

Ex. 5 (3)



38

Ex. 5 (4)

Compute the C.I.
using the t - dist. (since σ is unknown)

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= \overline{X} \pm t_{.05/2,10-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 0.32 \pm t_{.025,9}\frac{0.09}{\sqrt{10}}$$
$$= 0.32 \pm 2.262\frac{0.09}{\sqrt{10}}$$
$$= 0.32 \pm 0.064$$
$$= (0.256, 0.384)$$

Conclude : the manufacturer can be reasonably sure (95% confident) that the mean remaining tread depth is between 0.256 and 0.384 inches.

39

Ex. 6 (1)

The manager of the Inlet Square Mall, near Ft. Myers, Florida, wants to estimate the mean amount spent per shopping visit by customers. A sample of 20 customers reveals the following amounts spent.

$48.16	$42.22	$46.82	$51.45	$23.78	$41.86	$54.86
37.92	52.64	48.59	50.82	46.94	61.83	61.69
49.17	61.46	51.35	52.68	58.84	43.88	

40

Ex. 6 (2)

Compute the C.I.

using the t-dist. (since σ is unknown)

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= \bar{X} \pm t_{.05/2,20-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 49.35 \pm t_{.025,19}\frac{9.01}{\sqrt{20}}$$

$$= 49.35 \pm 2.093\frac{9.01}{\sqrt{20}}$$

$$= 49.35 \pm 4.22$$

The endpoints of the confidence interval are \$45.13 and \$53.57

Conclude: It is reasonable that the population mean could be \$50.

The value of \$60 is not in the confidence interval. Hence, we conclude that the population mean is unlikely to be \$60.

41

Example 7: 建設機械修護課程訓練（1）

經略公司為了提升維修人員的效率，開設維修課程。往年維修課程都是實地講解操作，因此授課時數較長，且受訓人員完成課程訓練的時間近似為常態分配。現公司請人設計了一套電腦模擬的維修訓練計畫，公司預期該計畫將縮短訓練時間並提升維修能力。設公司隨機由維修人員中抽取16人來接受此一訓練課程。16個員工完成訓練的天數不等，其平均訓練天數為46天，標準差為5.7天。問利用電腦模擬的機器維修課程訓練計畫平均所需天數為何(設信賴水準為95%)？

42

Example 7: 建設機械修護課程訓練 (2)

由題意知 $n = 16$ 為一小樣本，母體為常態分配但母體平均數與標準差未知，可求得母體平均數的信賴區間為：

$$\bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} = 46 \pm t_{16-1,0.025}\frac{5.7}{\sqrt{16}} = 46 \pm 2.131 \times 1.425 = 46 \pm 3.3037$$

其中 $t_{15,0.025} = 2.131$ ，即

$$42.963 \le \mu \le 49.037$$

故利用電腦模擬的機器維修課程訓練在 95% 信賴水準下，平均所需天數的信賴區間為 42.96 天到 49.04 天。

43

Confidence Interval Estimates for the Mean

Use *Z*-distribution

If the population standard deviation is known or the sample is greater than 30.

$$\bar{X} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \pm z\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Use *t*-distribution

If the population standard deviation is unknown and the sample is less than 30.

$$\bar{X} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

44

Confidence Intervals for Population Mean

- σ is know.

$$1-\alpha \text{ Confidence Interval: } \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- σ is unknown.
  - **n≧30 : Use Z distribution.**

$$1-\alpha \text{ Confidence Interval: } \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - **n <30 : Use t Distribution.**

$$1-\alpha \text{ Confidence Interval: } \overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

45

Factors Affecting Confidence Interval Estimates

The factors that determine the width of a confidence interval are:

1. The sample size, *n.*
2. The variability in the population, σ or *s.*
3. The desired level of confidence, α.

46

母體比例的區間估計

McGraw-Hill/Irwin

母體比例的區間估計：大樣本（*n π* and *n*(1-*π*) >5)

在大樣本的情形下， p 的抽樣分配為：$p \sim N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$

$$P\left(\left|\frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}\right| \le Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

母體比例 π 的 1- α 信賴區間為：

$$p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\pi(1-\pi)/n} \le \pi \le p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$$

48

母體比例的區間估計：大樣本（$n\pi$ and $n(1-\pi)>5$）

一般情形下，π 未知，所以改以 p 代替。因此，母體比例 π 的 1- α 信賴區間為：

$$p - Z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n} \le \pi \le p + Z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$$

49

母體比例的區間估計：大樣本（$n\pi$ and $n(1-\pi)>5$）

由於 π 未知，為了避免低估 $\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$ ，有時會以 π =0.5代入，因此，母體比例 π 的 1- α 信賴區間為：

$$p - Z_{\alpha/2}\sqrt{0.25/n} \le \pi \le p + Z_{\alpha/2}\sqrt{0.25/n}$$

50

Ex 9: 2004年總統大選-陳水扁的支持率 (1)

TVBS 在 2004 年 3 月 8 日的民意調查結果為：「連戰的支持率 40%，陳水扁 36%。以電話後四碼隨機抽樣進行電話訪問，共訪問 1,443 位台灣地區 20 歲以上公民。在 95% 的信心水準下，抽樣誤差約為正負 2.6 個百分點。」。該民調中陳水扁的支持率的信賴區間及抽樣誤差是如何計算的？

51

Ex 9: 2004年總統大選-陳水扁的支持率 (2)

樣本數 n= 1,443 為大樣本，樣本比例 $\hat{p} = 0.36$ ，可得 95% 的信賴區間為：

$$\hat{p} \pm Z_{0.025}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}} = 0.36 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1,443}}$$

$$= 0.36 \pm 0.0258$$

式中的 0.0258 即為抽樣誤差。因此可得陳水扁支持率的信賴區間為：

$$0.3342 \le p \le 0.3858$$

故可推論：「在 95% 信賴水準下，陳水扁所獲支持率33.42%~38.58%。」

或「支持陳水扁的比例為 36%，在 95% 信賴水準下誤為: $2.58 \approx 2.6\%$ 。」

52

Ex10. 孩子對父母的信賴程度 (1)

一項報告指出，少年最信任的對象為父母者，全國比例為 45.24%，臺灣地區的比例為 44.90%，而臺北市的比例只有 40.78% (臺北市抽選359 位少年) 。此一調查顯示：都市化程度較高地區的少年信任父母比例低於都市化較低地區。問臺北市的少年中，以父母為最信任對象者所占比例的 95% 信賴區間為何？

53

Ex10. 孩子對父母的信賴程度 (2)

已知樣本數 n= 359 為大樣本，樣本比例 $p=0.4078$。以父母為最信任對象者所占比例的95% 信賴區間為

$$p \pm Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.4078 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.4078)(0.5922)}{359}}$$

$$= 0.4078 \pm 0.0508$$

亦即臺北市的少年對父母的信任比例區間在 95% 信賴水準下為：

$$0.3570 \le \pi \le 0.4586$$

54

Ex11. (1)

The union representing the Bottle Blowers of America (BBA) is considering a proposal to merge with the Teamsters Union. According to BBA union bylaws, at least three-fourths of the union membership must approve any merger. A random sample of 2,000 current BBA members reveals 1,600 plan to vote for the merger proposal. What is the estimate of the population proportion?

Develop a 95 percent confidence interval for the population proportion. Basing your decision on this sample information, can you conclude that the necessary proportion of BBA members favor the merger? Why?

55

Ex11. (2)

First, compute the sample proportion :

$$p = \frac{x}{n} = \frac{1{,}600}{2000} = 0.80$$

Compute the 95% C.I.

$$\text{C.I.} = p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$= 0.80 \pm 1.96\sqrt{\frac{.80(1-.80)}{2{,}000}} = .80 \pm .018$$

$$= (0.782, 0.818)$$

Conclude : The merger proposal will likely pass because the interval estimate includes values greater than 75 percent of the union membership .

56

有限母體校正因子

Finite-Population Correction Factor

Finite-Population Correction Factor

- For a finite population, where the total number of objects is *N* and the size of the sample is *n*, the following adjustment is made to the standard errors of the sample means and the proportion:
- However, if *n*/*N* < .05, the finite-population correction factor may be ignored.

Standard Error of the Sample Mean

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Standard Error of the Sample Proportion

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Effects on FPC when n/N Changes

Finite-Population Correction Factor for Selected Samples When the Population Is 1,000

Sample Size	Fraction of Population	Correction Factor
10	.010	.9955
25	.025	.9879
50	.050	.9752
100	.100	.9492
200	.200	.8949
500	.500	.7075

Observe that FPC approaches 1 when *n/N* becomes smaller

Confidence Interval Formulas for Estimating Means and Proportions with Finite Population Correction

C.I. for the Mean (μ)

$$\bar{X} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

C.I. for the Mean (μ)

$$\bar{X} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

C.I. for the Proportion (π)

$$p \pm z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

CI For Mean with FPC - Example

There are 250 families in Scandia, Pennsylvania. A random sample of 40 of these families revealed the mean annual church contribution was $450 and the standard deviation of this was $75.

Develop a 90 percent confidence interval for the population mean.

Interpret the confidence interval.

$$\bar{X} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Given in Problem:

N – 250

n – 40

s - $75

Since n/N = 40/250 = 0.16, the finite population correction factor must be used.

The population standard deviation is not known therefore use the t-distribution (may use the z-dist since n>30)

Use the formula below to compute the confidence interval:

61

CI For Mean with FPC - Example

$$\bar{X} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$= \$450 \pm t_{.10,40-1} \frac{\$75}{\sqrt{40}} \sqrt{\frac{250-40}{250-1}}$$

$$= \$450 \pm 1.685 \frac{\$75}{\sqrt{40}} \sqrt{\frac{250-40}{250-1}}$$

$$= \$450 \pm \$19.98\sqrt{.8434}$$

$$= \$450 \pm \$18.35$$

$$= (\$431.65, \$468.35)$$

It is likely that the population mean is more than $431.65 but less than $468.35. To put it another way, could the population mean be $445? Yes, but it is not likely that it is $425 because the value $445 is within the confidence interval and $425 is not within the confidence interval.

62

樣本數的選擇

McGraw-Hill/Irwin

樣本數的選擇

- 在作統計估計時，除了選擇一個較佳的估計方法外，亦需考慮選取適當的樣本數。
  - 樣本數多：估計誤差小；成本高
  - 樣本數少：估計誤差大；成本低
- 選取樣本數的一般作法，是先設定一個可容忍的估計誤差，而在此誤差下選擇樣本數。

64

樣本數的選擇

- σ 已知：

  假設誤差不超過 E，即 $\bar{X}-\mu = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le E$ ，

  因此，選取的樣本數須滿足下列條件：

$$n \ge \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2$$

- σ 未知：

$$n \ge \left(\frac{Z_{\alpha/2}S}{E}\right)^2$$

65

Ex. 12

A student in public administration wants to determine the mean amount members of city councils in large cities earn per month as remuneration for being a council member. The error in estimating the mean is to be less than $100 with a 95 percent level of confidence. The student found a report by the Department of Labor that estimated the standard deviation to be $1,000. What is the required sample size?

Given in the problem:

- *E*, the maximum allowable error, is $100
- The value of *z* for a 95 percent level of confidence is 1.96,
- The estimate of the standard deviation is $1,000.

$$n = \left(\frac{z \cdot s}{E}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1.96 \cdot \$1{,}000}{\$100}\right)^2$$

$$= (19.6)^2$$

$$= 384.16$$

$$= 385$$

66

Ex. 13

A consumer group would like to estimate the mean monthly electricity charge for a single family house in July within $5 using a 99 percent level of confidence. Based on similar studies the standard deviation is estimated to be $20.00. How large a sample is required?

$$n = \left(\frac{(2.58)(20)}{5}\right)^2 = 107$$

67

Sample Size for Proportions

- σ ➔ p(1-p)
- The formula for determining the sample size in the case of a proportion is:

$$n = p(1-p)\left(\frac{Z}{E}\right)^2$$

where :

p is estimate from a pilot study or some source, otherwise, 0.50 is used

z - the z-value for the desired confidence level

E - the maximum allowable error

68

Ex. 14

The American Kennel Club wanted to estimate the proportion of children that have a dog as a pet. If the club wanted the estimate to be within 3% of the population proportion, how many children would they need to contact? Assume a 95% level of confidence and that the club estimated that 30% of the children have a dog as a pet.

$$n = (.30)(.70)\left(\frac{1.96}{.03}\right)^2 = 897$$

69

Ex. 15

A study needs to estimate the proportion of cities that have private refuse collectors. The investigator wants the margin of error to be within .10 of the population proportion, the desired level of confidence is 90 percent, and no estimate is available for the population proportion. What is the required sample size?

$$n = (.5)(1-.5)\left(\frac{1.65}{.10}\right)^2 = 68.0625$$

$$n = 69 \text{ cities}$$

70

Ex.16. 應抽取多少維修人員參加受訓才行？(1)

在 Ex.5 中，假設經略公司的洪經理對估計結果 42.96 ~ 49.04 天的精確度並不滿意。她希望「估計誤差有 95% 的機率會小於或等於2天」。問如要達到這個目標至少應抽取多少個樣本才行？

71

Ex.16. 應抽取多少維修人員參加受訓才行？(2)

估計誤差不超過 2 天： $\bar{X} - \mu = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 2$

因母體標準差未知，但可得 S=5.7 ，因此：

$$n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{d^2} = \frac{(1.96)^2(5.7)^2}{2^2} = 31.203$$

取整數得： $n \ge 32$

由此知，至少應抽取 32 個維修人員，亦即如果洪經理想要在 95% 信賴水準下，得到 2 天的估計誤差時，需增加 16 個維修人員的測試資料才行。

72

Ex. 17. 鏡框瑕疵品比例的估計 (1)

設茂得利公司新安裝一部製造鏡框的機器，該公司要估計該機器生產的瑕疵品的比例。老闆希望在 95% 的信賴水準下，估計誤差不超過 0.03，問最保守的估計應抽取多少樣本數才行？

73

Ex. 17. 鏡框瑕疵品比例的估計 (2)

抽樣誤差不超過 0.03：

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 0.25}{d^2} = \frac{Z_{0.025}^2 (0.25)}{(0.03)^2} = \frac{(1.96)^2 (0.25)}{0.0009} = 1,067.1$$

取整數得： $n \geq 1,068$

由此知，至少應抽取 1,068 個樣本。

74

單 尾 區 間 估 計

McGraw-Hill/Irwin

單尾區間估計

- 前述的信賴區間為求長度越小越佳，因此採取雙尾的信賴區間 ，由上下限共同構成。
- 在某些情況， 研究者只需要估計母體參數不要超過某個值（或不要小於某個值），因此只需估計單尾的信賴區間。
  - 高露潔公司要調查市場對新產品的需求量，公司只關心需求量『至少有多少』。
  - 銀行貸款給客戶，要調查客戶資產『至多是多少』。

76

單尾區間估計：母體平均數

- 母體平均數 1-α 最高限制的信賴區間

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -Z_{\alpha}\right)=1-\alpha \;\Rightarrow\; -\infty \leq \mu \leq \bar{X}+Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 母體平均數 1-α 最低限制的信賴區間

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\alpha}\right)=1-\alpha \;\Rightarrow\; \bar{X}-Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \infty$$

77

Ex. 19 買不買新機器呢？(1)

為了降低成本。正新公司正在計劃購買一套自動化設備。若這套設備的每單位產品成本的節省不低於 20,000 元，則公司將購買該設備；反之，則不買。設備製造商同意試用一星期，試用期間該設備生產了 36 件產品，平均省下 21,000 元，標準差為 1,050 元。現問正新公司是決策為何？買或不買？

78

Ex. 19 買不買新機器呢？(2)

依題意可估計節省成本的最低限值得信賴區間，因 σ 未知，以 S = 1,050元估計 σ ，得最低限值信賴區間為：

$$\mu \geq \bar{X}-Z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}=21{,}000-1.645\frac{1{,}050}{\sqrt{36}}=20{,}712$$

因此， 95% 最低值的信賴區間為 \$ (20,712 ~ ∞)元，因此正新公司可下決策：「因為單位成本節省大於 20,000 元，所以可購買該自動化設備。」

79

Ex. 20旅行社旅遊成本的估計 (1)

最近這幾年，中國大陸成為台灣人觀光的熱門地區。雖然旅行團很多，但是競爭也非常激烈。旅行社為了招攬生意，也都盡量將費用減至最低，不過也有一個底限，低於這個底限就要虧本。在考慮收費底限時，旅行社則是以每人的最高支出計算。正和旅行社根據過去 900 個旅客的資料，上海 4 天旅遊的每人平均成本 (團費) 為 15,000 元，標準差為 6,000 元。現黃經理欲估計平均成本 95% 最高限值的信賴區間，以做為新年度收費的參考。試問平均成本 95% 最高限值的信賴區間為何？

80

Ex. 20旅行社旅遊成本的估計 (2)

因 σ 未知，以 S = 6,000 來估計 σ，得最高限值信賴區間為：

$$\mu \leq \bar{X} - Z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} = 15,000 + 1.645\frac{6,000}{\sqrt{900}} = 15,329$$

因此， 95% 最高限值的信賴區間為 (0~15,329) 元，因此正和旅行社的黃經理可說：「上海旅遊每人成本不超過 15,329 元」。至於要向顧客收多少費用必須看公司想要的利潤以及旅遊業競爭的情況而定。

81

Ex. 21牙膏需求量的估計 (1)

高露潔公司推出新口味牙膏，並進行市場調查顧客對新口味牙膏的接受率，於是隨機抽取 360 顧客，並派員到 360 顧客家中訪問是否喜好新口味，結果發現有 0.7 的顧客喜歡該口味。該公司的業務經理劉先生欲估計接受率 99% 最低限值的信賴區間，以做為保守估計新口味牙膏的需求量。試求接受率 99% 最低限值的信賴區間。

82

Ex. 21牙膏需求量的估計 (2)

根據中央極限定理已知樣本接受率 $\hat{p}$ 為一常態分配，其標準差為：

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{360}} = 0.024$$

於是可得 99% 最低限值的信賴區間為：

$$p \geq \hat{p} - Z_{\alpha}\sigma_{\hat{p}} = 0.7 - 2.33 \times 0.024 = 0.7 - 0.056 = 0.644$$

因此，可知高露潔牙膏新口味的接受率 99% 的最低限值的信賴區間為 (0.644~1) 。

83

Exercises

- 3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,31,33,39, 43,45,49,51,55,57,

84