2-2　層級分析程序法(Analytic Hierarchy Process, AHP)

本研究係採用 AHP 分析法作為評估並選定 PWQI 指標參數之研究工具，本節乃針對 AHP 分析法之理論基礎、分析程序與步驟加以探討，以瞭解此方法的基本假設與限制、運用時機，以及分析步驟與程序等，據以建立本研究之 AHP 層級結構，作為本研究在選定 PWQI 之指標參數及其權重設定之有力依據。

2-2-1　AHP 之內涵與特性

AHP 為 1971 年美國學者 Thomas L. Saaty 所發展出一套實用的決策方法。經由不斷應用、修正及驗證，1980 年後，AHP 的整個理論更臻完備。AHP 的理論簡單，操作容易，同時能擷取多數專家學者與決策者之意見，在實務上甚具實用性。其主要應用領域在於不確定性(Uncertainty)情況下及具有多數評估準則的決策問題上(Saaty，1980)。AHP 是將複雜的問題系統化，透過建立具有相互影響關係的階層結構(Hierarchical Structure)，可使複雜的問題、風險不確定的情況、或分歧的判斷中尋求一致性，藉由量化的判斷來綜合評估，以提供決策的充分資訊與降低決策的風險。

AHP 結合定量與定性，將人的主觀判斷以數量形式表達和處理的方法(即定量化)。本質上 AHP 是一種思維法則，其最大的功用在使錯綜複雜的問題分解成各個組成要素，再將這些要素依關係分組形成簡明的層級結構系統；並藉由名目尺度(Nominal Scale)作各層級要素之成對比較矩陣後，經運算求得矩陣之特徵向量(Eigenvector)，代表層級中某層次各要素之優先程度，再求出特徵值，以該特徵值評定每個配對比較矩陣之一致性強弱程度，作為取捨或評估決策之訊息，確定決策方案相對重要性之優勢順位(Priority)，此即為決策分析之參考數據。

一、AHP 之目的與假設

AHP 發展的目的，就是將複雜問題系統化，由不同的層面給予層級分解，並透過量化的判斷，覓得脈絡後加以綜合評估，以提供決策者選擇適當方案的充分資訊，同時減少決策錯誤的風險性。

AHP 之基本假設，主要包括下列九項(鄧振源、曾國雄，1989)：

1.一個系統可被分解成許多種類(Classes)或成份(Components)，並形成有向網格層級結構。

2.層級結構中，每一層級的要素均假設具獨立性(Independence)。

3.每一層級內的要素，可以用上一層級內某些或所有要素作為評準，進行評估。

4.比較評估時，可將絕對數值尺度轉換成比例尺度(Ratio Scale)。

5.成對比較(Pairwise Comparison)後，可使用正倒值矩陣(Positive Reciprocal Matrix)處理。

6.偏好關係滿足遞移性(Transitivity)，不僅優劣關係滿足遞移性(A 優於 B ， B 優於 C ，則 A 優於 C)，同時強度關係亦滿足遞移性(A 優於 B 二倍， B 優於 C 三倍，則 A 優於 C 六倍)。

7.完全具遞移性並不容易，因此容許不具遞移性的存在，但需測試其一致性(Consistency)的程度。

8.要素的優勢程度，可經由加權法則(Weighted Principle)而求得。

9.任何要素只要出現在階層結構中，不論其優勢程度是如何小，均被認為與整個評估結構有關，而並非檢核階層結構的獨立性。

使用 AHP 方法來分析問題或系統，首先是將欲研究的複雜問題，劃分成簡單明確的層級架構關係，以簡明之要素層級結構加以表示，並藉著比率尺度(Ratio Scales)及名目尺度(Nominal Scales)來做要素的成對比較及建立矩陣，以找出各個層級要素的重要程序、優先順序或貢獻大小。因此，在建立系統的層級結構時，需解決的問題有二：一是如何建構層級關係，二則是如何評估各層級要素的影響程度。前者可利用腦力激盪法(Brain-storming)、明示結構法(Interpretive Structural Modeling, ISM)、階層結構分析法(Hierarchical Structural Analysis, HSA)、結構模型群體法(Group Method of Structural Modeling, GMSM)以及 PATTERN 法(Planning Assistance Though Technical Evaluation of Relevance Number)等，加以確認其層級關係，實際應用上並無一定的建構程序。後者則可利用特徵向量法(Eigenvector Method, EM)，最小平方法(Least Squares Method, LSM)、幾何平均法(Geometric Means Method, GMM)、Churchman 法及 Scheffe’法等，而 AHP 法係利用特徵向量法來求取要素間的權重(鄧振源、曾國雄，1989)。

其次在使用 AHP 時，使用者必須有下列基本認知(Vargas，1990)：

1.預期性(Expectations)：所有的關係層級及評估要素必須完整包涵，不能有所忽略或遺漏。

2.獨立性(Independence)：元素彼此間的比較必須假設相互為獨立。

3.倒數性(Reciprocal Comparison)：即在評估時，若 A 對 B 有 n 倍的偏好，則 B 對 A 應只有 $\frac{1}{n}$ 倍。

4.同質性(Homogeneity)：元素的比較必須是有意義，並有一合理的評估尺度之間。

二、AHP 之層級與要素

階層是系統特別的型態，基於個體可以加以組成並形成不同集合體的假設下，將影響系統的要素組合成許多層級(群體)，每一層級只影響另一層級，同時僅受另一層級的

影響。而層級為系統的骨架，用以研究階層中各要素的交互影響，以及對整個系統的衝擊(Impact)。

(一)層級的建構

層級的建構在 AHP 中是非常重要的一環，良好的層級架構對於問題之解決有關鍵性的影響。層級的結構是以複雜度遞減的方式排列，上層的元素用以列舉系統的最終目標，而下層的元素用以陳述系統的次第與限制，以確保其上層目標之必然滿足，更下一層的元素則用以提供系統結構及功能方面的資訊。因此，所建構層級的多寡，將視系統的複雜性與人為分析所需而定，其層級結構如圖 2-5 所示。

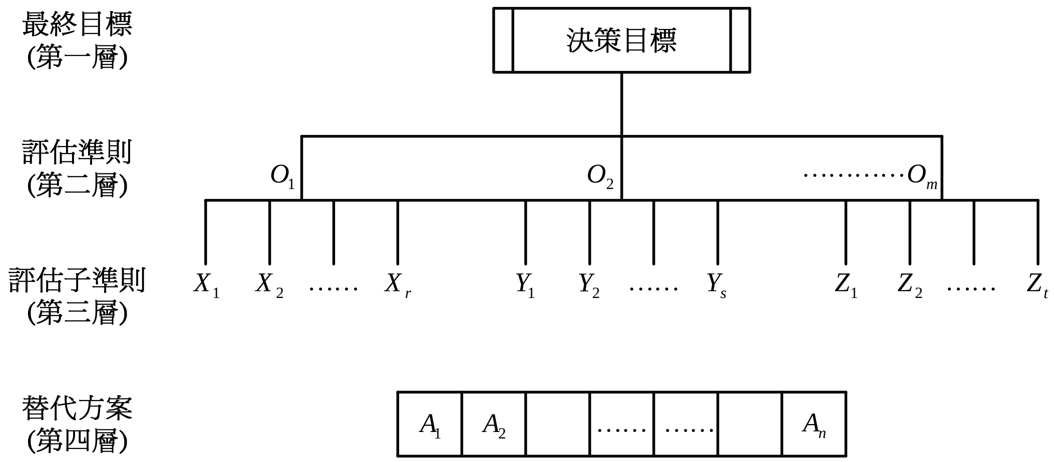

圖 2-5　AHP 層級結構示意圖
資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)

層級的設計必須仰賴決策者對問題的經驗及瞭解，因此層級結構並非是不變的，不同決策者在面對同一問題時，通常會建構出二種不同的層級。而即使在同樣的層級結構之下，對準則的偏好程度不同，亦會產生不同的結果。此時，則必須透過群體協商來達到層級結構與評價的共識。建立層級結構時，需盡可能的完整的表達問題，但又需避免太過詳細而失去準則的敏感度(Saaty，1990)。相反的，層級結構如果太過於簡化，則會失去描述問題的真實性。

建立層級結構是將影響系統的要素加以分解成數個群體，每個群體再區分成數個次群體，逐級下去建立全部的層級結構。在階層結構的建置與分析群組時應注意以下幾點(鄧振源、曾國雄，1989)：

1.最高層級代表評估的最終目標。

2.盡量將重要性相近的要素放在同一層級。

3.層級內的要素不宜過多，依 Saaty 的建議最好不要超過 7 個，超出者可再分層解決，以免影響層級的一致性。

4.層級內的各要素，力求具備獨立性，若有相依性(Dependence)存在時，可先將獨立性與相依性各自分析，再將二者合併分析。

5.最低層級的要素即為替代方案。

根據 Saaty 的說明，建立層級結構以解決複雜的問題，具有以下的優點(Saaty，1990)：

1.利用要素建立層級的形成，有助於工作的達成。

2.建立層級有助於描述系統的結構面及功能面。

3.建立層級有助於描述要素間彼此的影響程度。

4.自然系統通常是以層級方式組成，且層級是一種有效的方式。

5.層級具有穩定性(Stability)與賦彈性(Flexibility)。也就是說微量的改變會造成微量的影響，且對於結構良好的層級而言，加入一個層級不會影響整個層級系統的有效性。

(二)層級的種類

AHP 主要步驟就是建立一個層級結構，以作為解決問題的依據。將一個複雜的系統分解與結合後，所建立的層級結構包括二種：一為完整層級(Complete Hierarchy)，另一為不完整層級(Incomplete Hierarchy)。完整層級表示每一個上層層級與下層層級間具有關聯性，如圖 2-6 所示；而不完全層級並非每一層級間具有關連性，如圖 2-7 所示。大致而言，完整層級不易存在，現實問題中絕大部分皆為不完整層級的型態。本研究評估適飲性項目對水質適飲性影響之相對權重(重要性)係採用不完整層級的型態。

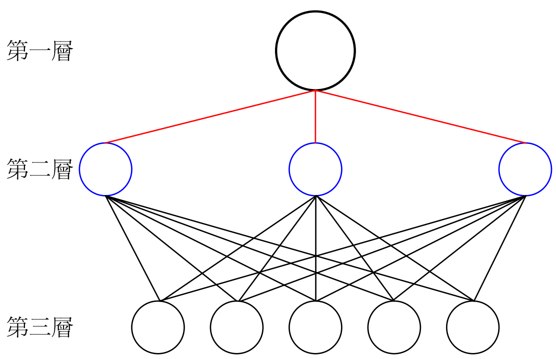

圖 2-6　AHP 完整層級結構示意圖
資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)

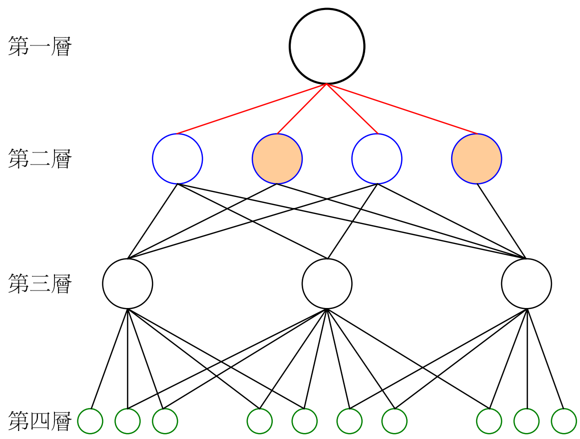

圖 2-7　AHP 不完整層級結構示意圖
資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)

三、相依與獨立

處理複雜問題的能力，受到某些因素的限制；相依性與獨立性的概念，即為一例。在實際處理問題時，有必要加以考量。一般處理相依性的問題時，由於不夠完善與清楚，因此常在獨立性的假設下進行評估與分析；此一簡化過程，雖然在處理問題上所花費的工夫(時間、勞力及金錢等)得以節省。但仍需避免過度的簡化，致使問題失去原貌。

相依性大致可分為二類，第一類為機能的或定性的相依性(Functional or Qualitative Dependence)，第二類為結構的或定量的相依性(Structural，r Qualitative Dependence)。機能的相依性，是指某一層級的要素，依據其他層級的屬性或評準，進行比較給予評點，從而得到易於瞭解的關聯情形；因此可以說是層級間絕對的比較。結構的相依性，是指對某一層級內的要素，進行相對權重的比較，從而得到各要素相對的尺度值；若使用絕對的比較時，則沒有結構的相依性，因為無法從一個基本的尺度導出各要素相對的尺度值。因此，在 AHP 法中比較不關注結構的相依性，而只認為有機能的相依性存在，如表 2-5 所示(鄧振源、曾國雄，1989)。

表 **2-5**　不同比較法相依性之有無

比較法 相依性	相對的比較 **(**尺度化**)**	絕對的比較 **(**評點化**)**
機能的 (外部、內部)	✓	✓
結構的	✓	—

資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)。
備　　註：”✓”表示具有相依性。

機能的相依性，又可區分為層級間的相依性與層級內的相依性，前者稱為外部相依性(Outer Dependence)，後者稱為內部相依性(Inner Dependence)。設若能得到某一層級要素的基本尺度，並作為另一層級每一要素比較的依據，則稱為另一層級的外部相依性。當某一層級的要素，一方面為另一層級的外部相依性，一方面在另一層級要素作為評準下，該層級內具有相依性，稱為內部相依性。有如投入產出分析(Input-Output Analysis)一般，區域與區域間具有外部相依性，而區域內也具有內部相依性。

四、評估尺度

層級結構建構完成後，接下來就是評估的工作。AHP 的評估是以每一層級的上一層要素作為對下一層要素間的評估依據。換言之，就是將某一層級內的任二個要素，以上一層的要素作為評估準則，分別評估該二個要素對評估準則的相對貢獻度或重要性。此

一過程是將複雜的問題分解為兩兩成對比較，減輕評估者的思考負擔，而能專注在二個要素間的關係。

AHP 評估尺度的基本劃分包括五項，即「同等重要」、「稍重要」、「頗重要」、「極重要」、「絕對重要」等，並賦予名目尺度 1、3、5、7、9 的衡量值；另有四項介於五個基本尺度之間，並賦予 2、4、6、8 的衡量值，有關各名目尺度代表意義如表 2-6 所示。AHP 在處理認知反應的評估得點時，則採取比率尺度的方式(從名目尺度產生)(鄧振源、曾國雄，1989)。

表 2-6　AHP 評估尺度意義及說明

評估尺度	定義	說明
1	同等重要 (Equal Importance)	1.兩比較方案的貢獻程度具同等重要性。 2.等強(Equally)。
2	評估尺度1與3之中間值	相鄰尺度之中間值(Intermediate values)
3	稍重要 (Weak Importance)	1.經驗與判斷稍微傾向喜好某一方案。 2.稍強(Moderately)。
4	評估尺度3與5之中間值	相鄰尺度之中間值(Intermediate values)。
5	頗重要 (Essential Importance)	1.經驗與判斷強烈傾向喜好某一方案。 2.強(Strongly)。
6	評估尺度5與7之中間值	相鄰尺度之中間值(Intermediate values)
7	極重要 (Very Strong Importance)	1.實際顯示非常強烈傾向喜好某一方案。 2.極強(Very Strong)。
8	評估尺度7與9之中間值	相鄰尺度之中間值(Intermediate values)。
9	絕對重要 (Absolute Importance)	1.有足夠證據肯定絕對喜好某一方案。 2.絕強(Extremely)。

資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)。

五、群體評估的整合

替代方案的選擇由決策群體進行群體決策(Group Decision Making)時，則需將決策群體成員的偏好(Preference)加以整合。因此，判斷的整合在 AHP 中，是一個相當重要的部分。Saaty 在一些合理之假設下，建議利用幾何平均數(Geometric Mean)作為整合之函數。主要係因若某一個決策成員的判斷值為 a，而其他決策成員的判斷值為 $\frac{1}{a}$ 時，其平均值應為 1，而不是 $\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)}{2}$。所以 n 個決策成員的判斷值 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$，其平均值應為 $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots\cdots\cdot x_n}$。

2-2-2　AHP 之理論基礎

對於各要素之間的比較，最有效率的方法就是每次比較時僅針對單一種特性進行兩兩比較，而不用同時考慮其他特性的影響。假設在某一層級有 n 個評估要素

$A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n$，在上一層某一要素為評估基準下，求取每一要素權重分別為 $W_1, W_2, W_3, \cdots\cdots, W_n$，而 A_i 與 A_j 的相對權重以 a_{ij} 表示，評估要素 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n$ 的成對比較矩陣為 $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$，其元素如(2-12)式所示：

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}12)$$

假設 $W_1, W_2, W_3, \cdots\cdots, W_n$ 為已知時，則成對比較矩陣 $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ 將可寫成如(2-13)式之形式：

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_1}{W_1} & \frac{W_1}{W_2} & \cdots & \frac{W_1}{W_n} \\ \frac{W_2}{W_1} & \frac{W_2}{W_2} & \cdots & \frac{W_2}{W_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{W_n}{W_1} & \frac{W_n}{W_2} & \cdots & \frac{W_n}{W_n} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}13)$$

其中：

$$a_{ij} = \frac{W_i}{W_j} \quad , \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad , \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \quad , \quad i, j = 1,2,3,\cdots\cdots,n$$

由於 a_{ij} 均為正實數，而矩陣 A 之對角線為要素自身的比較，因此均為 1，而下三角形部分的數值為上三角形部分相對位置數值的倒數，即滿足 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$，因此矩陣 A 為正倒值矩陣(Positive reciprocal matrix)[2]。就 n 個要素中的 i，j，k 要素而言，若 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ 成立時，則表示決策者的判斷前後具一致性，意即矩陣 A 可以視為一致性矩陣(Consistent matrix)[3]。由於

$$因為 \quad a_{ij} \cdot \frac{W_j}{W_i} = \frac{W_i}{W_j} \cdot \frac{W_j}{W_i} = 1 \qquad i, j = 1,2,3,\cdots\cdots,n \qquad (2\text{-}14)$$

---

[2] 正倒值矩陣(Positive reciprocal matrix)：一個 $n \times n$ 矩陣 A，若其內所有元素均爲正值且元素間具有 $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$，$a_{ij} = 1$，$\forall i, j$ 之關係，則此一矩陣 A 稱爲"正倒值矩陣"。

[3] 一致性矩陣(Consistent matrix)：一矩陣 A 的元素間滿足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$，$i, j, k = 1,2,3,\cdots,n$，則稱矩陣 A 具一致性(Consistency)。

所以 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{W_j}{W_i} = n \qquad i, j = 1,2,3,\cdots\cdots,n \qquad (2\text{-}15)$$

或 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot W_j = n \cdot W_i \qquad i, j = 1,2,3,\cdots\cdots,n \qquad (2\text{-}16)$$

因此，成對比較矩陣 A 乘上其權重向量 $\tilde{W}$ ，則得到 $n\tilde{W}$ 之值。即

$$A \cdot \tilde{W} = \begin{bmatrix} \frac{W_1}{W_1} & \frac{W_1}{W_2} & \cdots & \frac{W_1}{W_n} \\ \frac{W_2}{W_1} & \frac{W_2}{W_2} & \cdots & \frac{W_2}{W_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{W_n}{W_1} & \frac{W_n}{W_2} & \cdots & \frac{W_n}{W_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nW_1 \\ nW_2 \\ \vdots \\ nW_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = n \cdot \tilde{W} \qquad (2\text{-}17)$$

由上式得知， $A \cdot \tilde{W} = n \cdot \tilde{W}$ 即為特徵值問題

$$(A - nI) \cdot \tilde{W} = 0 \qquad (2\text{-}18)$$

(2-19)式只有在 $\tilde{W} \neq 0$ 之下才成立，同時具有 n 個之特徵值(Eigenvalue)，此時 $\tilde{W}$ 即為矩陣 A 之特徵向量(Eigenvector)(優勢向量)；欲求各個要素的權重，則需解 $(A - nI) \cdot \tilde{W} = 0$ 。在線性代數上，本問題具有以下特性：

1.矩陣 A 的所有元素均為正值。依據 Perron-Frobenius 定理，矩陣 A 具有正的特徵值，其中最大的特徵值為 $\lambda_{\max}$ ，其所對應特徵向量的元素都為正直。

2.矩陣 A 對稱元素相互間為倒數關係，即 $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ ，稱為正倒值矩陣(Positive Reciprocal Matrix)。

3.因矩陣 A 的行向量(Column Vector)為 $(W_1, W_2, W_3, \cdots\cdots, W_n)^T$ 的常數倍，故其秩為 1(即 $Rank(A) = 1$)。所以在特徵值 $\lambda_i (i = 1,2,3,\cdots\cdots,n)$ 中，只有一個不為 0 之特徵值，其餘皆為 0，而非零的特徵值以 $\lambda_{\max}$ 表示。即

$$\lambda_i = 0 \quad , \quad \lambda_{\max} \neq 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_{\max}) \qquad (2\text{-}19)$$

4.矩陣 A 的主對角線元素皆為 1，故主對角線和為 n (即 $Trace(A) = n$)。且從特徵值的特性得知，所有特徵值之和亦為 n 。故

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) \equiv \text{對角元素之和} = n \ (= \lambda_{\max}) \qquad (2\text{-}20)$$

5.由 3.及 4.的性質得知，最大特徵值為n，即

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n \tag{2-21}$$

因此，評估要素$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$的優勢向量$\widetilde{W}$，即為矩陣$A$最大特徵值$\lambda_{\max}$所對應特徵向量標準化後的值。但在實際進行成對比較時，a_{ij}是依決策者之主觀判斷而得，與理想的比率$\dfrac{W_i}{W_j}$多少有些差距。即

$$a_{ij} \approx \frac{W_i}{W_j} \left(a_{ij} = \frac{W_i'}{W_j'}\right) \tag{2-22}$$

其中$\widetilde{W}'$為實際比較的權重向量，因此，$A \cdot \widetilde{W} = n \cdot \widetilde{W}$不再成立。當$a_{ij}$有些許變動時，特徵值$\lambda_{\max}$亦會隨之變動，因此，$\lambda_{\max}$不可能完全等於$n$，故可藉由$\lambda_{\max}$與$n$之差異程度，來判斷決策者評估一致性之優劣。

Saaty 對於此種實際發生的狀況，提出以下的說明：

1.假設$\lambda_i (i = 1,2,3,\cdots\cdots,n)$滿足$A \cdot \widetilde{W} = \lambda \cdot \widetilde{W}$ (即λ為矩陣A之特徵值)，且若$a_{ii} = 1$，則$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$。因此$A \cdot \widetilde{W} = n \cdot \widetilde{W}$成立，而且只有一個特徵值$n$以外，其餘的特徵值均為 0，所以在一致性矩陣的情況下，矩陣A的最大特徵值$\lambda_{\max} = n$。

2.若將正倒值矩陣A的元素a_{ij}作微量變動(Small Perturbation)，則特徵值亦作微量變動。當矩陣A為一致性矩陣時，則a_{ij}的微量變動，不會使$\lambda_{\max}$變動太大，使得$\lambda_{\max}$仍然趨近於n，而其餘的特徵值亦仍為 0。

3..以理想狀況而言，欲判定決策者之評估是否具有一致性，可由下列兩要點得知：

(1)假設i，j，k為在n個要素內的三要素，是否$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$成立。

(2)是否$\lambda_{\max} = n$成立。

因此，若矩陣A為一致性矩陣時，其優勢向量$\widetilde{W}$可依下式求取：

$$A \cdot \widetilde{W} = \lambda_{\max} \cdot \widetilde{W} \tag{2-23}$$

在實際處理複雜的問題時，理想的優勢向量$\widetilde{W}$為未知，必須先依據決策者的成對比較矩陣A'，依據下式求取$\widetilde{W}'$。即

$$A' \cdot \widetilde{W} = \lambda_{\max}' \cdot \widetilde{W}' \tag{2-24}$$

而最大特徵值 $\lambda'_{\max}$ 可由下式求得：

$$\lambda'_{\max} = \frac{1}{n}\left(\frac{w'_1}{w_1} + \frac{w'_2}{w_2} + \cdots\cdots \frac{w'_n}{w_n}\right) \tag{2-25}$$

其中 $\lambda'_{\max}$ 為矩陣 A' 的最大特徵值。由於決策者主觀的判斷，矩陣 A' 並不具一致性，因此 $\lambda'_{\max} \neq n$ $(\lambda'_{\max} > n)$。因此可由 $\lambda'_{\max}$ 與 n 兩者之間差異程度來作為判斷資料是否具一致性的評估準則。若決策者前後判斷具一致性，則 $\lambda'_{\max} = n\ (= \lambda_{\max})$。Saaty 建議以一致性指標(Consistency Index, C.I.)來表示與一致性的接近程度，其定義如下式：

$$C.I. = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n-1} \tag{2-26}$$

當成對比較矩陣 A' 完全具有一致性，則 $\lambda'_{\max} - n = 0$，即 $C.I. = 0$。而 $C.I. > 0$ 則表示前後判斷不一致。然而人類的心智有時會有所謂的矛盾現象，要完全達成一致性是很不容易的，因此 Saaty 建議 $C.I. \leq 0.1$ 為可容許的偏誤。

根據 Dak Ridge National Laboratory 與 Wharton School 進行研究，從評估尺度 1~9 所產生的正倒值矩陣 A'，在不同的階數(Order)下，產生不同的 C.I.值，稱為隨機指標(Random Index, R.I.)。其中矩陣階數為 1~11 的 R.I.值，係以 500 個樣本所求得的平均值；而階數為 12~15 的 R.I.值，則用 100 個樣本所求得的平均值，其結果如表 2-7 所示。

表 **2-7**　隨機指標 **R.I.**值對照表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12	14	15
R.I.	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)。

在相同階數的矩陣下，C.I.值與 R.I.值比率，則稱為一致性比率(Consistency Ratio, C.R.)，即

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.} \tag{2-27}$$

若 $C.R. \leq 0.1$ 時，則矩陣的一致性程度今人滿意，然而決策者對 AHP 的熟悉程度關係著問卷填寫時是否會兼顧遞移性，而影響一致性的結果。

由於層級間的重要性不一樣，因此需檢驗整體層級結構是否一致性，具一致性方可接受評估值。整體層級的一致性比率(Consistency Ratio of the Hierarchy, C.R.H.)，就是將整體層級一致性指標(Consistency Index of the Hierarchy, C.I.H.)除以整體層級隨機指標(Random Index of the Hierarchy, R.I.H.)。其數學式如下：

$$C.I.H.=\sum \text{(每個層級的優先向量)}\times\text{(每個層級的 C.I.值)} \quad (2\text{-}28)$$

$$R.I.H.=\sum \text{(每個層級的優先向量)}\times\text{(每個層級的 R.I.值)} \quad (2\text{-}29)$$

$$C.R.H = \frac{C.I.H.}{R.I.H} \quad (2\text{-}30)$$

若 $C.R.H. = \dfrac{C.I.H.}{R.I.H.} < 0.1$，則整體層級的一致性可接受。

2-2-3 AHP 之分析程序與步驟

AHP 即是以名目尺度執行層級中各元素間之成對比較，然後建立成對比較矩陣後，以求出特徵向量(Eigen-vertor)，以該向量代表階層中某層次各元素間之優先度(Priority)，再求出特徵值(Eigen-value)，作為評定每個成對比較矩陣之一致性強弱程度之依據，若符合一致性，則特徵向量所代表之優先率(優勢權重)，便足以作為決策或評選之依據。

在處理複雜的問題時，系統化的方式為最有效的解決方法，AHP 在具有多目標(Multiobjective)或多準則(Multicriteria)的決策領域中，是一種簡單而實用的方法；應用 AHP 處理問題時，大致可區分成下列六個步驟，其分析程序與步驟如圖 2-8 所示(鄧振源、曾國雄，1989)。

一、問題界定

對於問題所可能涵蓋的範圍，宜盡量的擴大，將可能影響問題的要因，均可納入問題中。問題界定可分為澄清問題與分解問題，澄清問題是要將問題予以清楚而肯定的指明，因為「將問題明確的指出就等於解決問題的一半」，所以問題說明的重要性可見一斑。而分解問題可遵循 5W1H(What、Why、Where、Who、When、How)的原則來將問題簡化。

二、建立層級結構

有關層級的建立，在前節中已有詳述。由規劃群體成員，利用腦力激盪找出影響問題行為的評估準則(Criteria)、次要評估準則(Sub-criteria)及最下層的的替代方案(Alternatives)，形成一個層級結構(Saaty，1980)。依據 Saaty 研究指出：因成對比較數為 C_2^n (n 為元素數目)，當 $n > 7$ 時，人腦的評比思考過程中易產生錯亂及不一致的情形發生，此即所謂比較心理原則(Principle of Pairwise Comparison)，建議每一層級要素不宜超過 7 個($n \le 7$)；在最大要素個數 7 個下，則可進行合理的比較，同時可以保證其一致性。

因此，有效的層級數可用 $\frac{n}{7}$ 估計；如此的層級結構，可收(1)易進行有效的成對比較，與(2)獲得較佳的一致性。

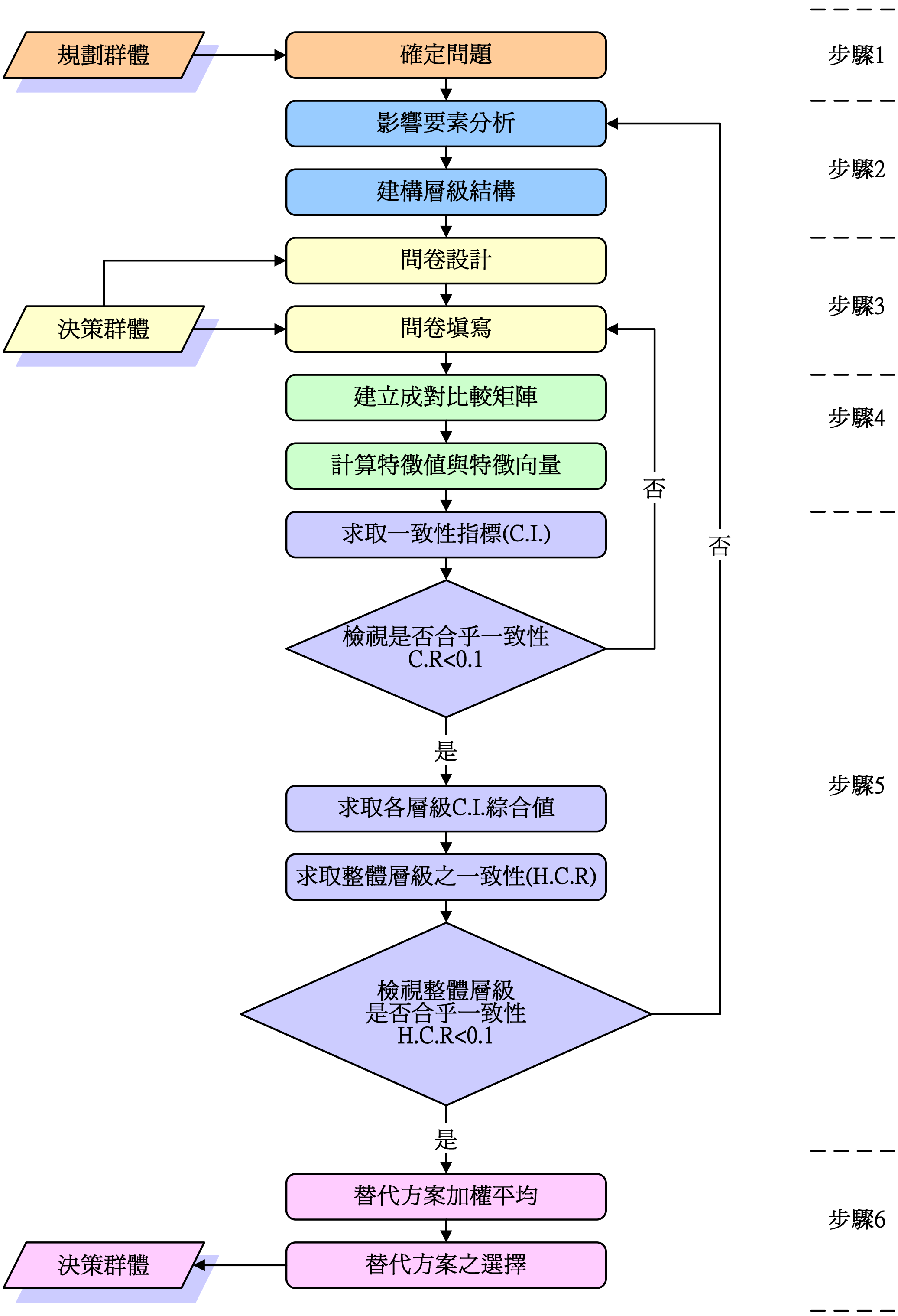

圖 2-8　AHP 分析程序與步驟之流程圖

資料來源：鄧振源、曾國雄(1989)

三、設計問卷與調查

AHP 進行評估的方式，以成對比較方式進行評估，而評估過程中之評估尺度的劃分。AHP 採用名目尺度(Nominal Scale)方式進行比較，此名目尺度總共區分為由「同等重要」至「絕對重要」九個等級，再分別給予評點比重從 1 至 9。AHP 主要對每一層級要素進行兩兩相互比較，藉由重要性的強弱不同給予不同權數，來了解評估者自身主觀的看法，而這些名目尺度，可能會給予問卷填寫者產生混淆，根據(吳統雄，1981)名目尺度較不易評量，故其建議採用比例尺度，較符合受測者的感受，且信度較佳，AHP 問卷示意圖如表 2-8 所示。

表 2-8　AHP 問卷範例示意圖

※以「人體感官別」對水質適飲性影響強弱兩兩比較

評估準則	左端絕對																右端絕對	評估準則
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1.視覺																		2.嗅覺
1.視覺																		3.味覺(口感)
2.嗅覺																		3.味覺(口感)

資料來源：摘自鄧振源、曾國雄(1989)；本研究整理。

每一層級要素在上一層級某一要素作為評估準則下，進行成對比較。因此，依據 AHP 的評估尺度原則與意義，對每一個成對比較問題設計問卷，讓決策者或決策群體的成員填寫(勾劃每一成對要素比較的尺度)，問卷必須清楚的敘述每一成對比較的問題，並附加詳細的引導說明。

根據問卷調查所得的結果，建立成對比較矩陣，再應用分析工具求取各成對比較矩陣的特徵值與特徵向量，同時檢定矩陣的一致性。如矩陣一致性的程度不符要求，顯示決策者的判斷前後不一致，因此，研究者需將問題向決策者清楚地說明(一般在填寫問卷前，研究者宜就每一成對比較問題，向決策者或決策群體的成員說明與分析)。

四、建立成對比較矩陣

某一層級的要素，以上層級某一要素為評估基準下，進行要素間重要性的成對比較(Pairwise Comparison)，比較每兩個要素間相對重要程度。若有 n 個要素時，則需進行 $C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$ 個成對比較。其採用名目尺度(Nominal Scale)，設定其相對重要性的比值(Ratio)，所使用之數值分別是 1/9，1/8……，1/2，1，2，3，…，8，9，接著將 n 個要素

成對比較結果的衡量值，置於成對矩陣的上三角形部分，主對角線為要素本身之比較，數值均為 1，而下三角形部分為上三角形部分相對位置之倒數，此即成對比矩陣 A。

成對比較矩陣求得後，即可求取各層級要素的權重。使用數值分析中常用的特徵值(Eigen-value)解法，找出成對比較矩陣之特徵向量(Eigen vector)或稱優勢向量(priority vector)與最大特徵值。由於成對比較矩陣是正倒值矩陣，而不是對稱矩陣，因此可用的特徵值解法主要利用乘冪法及 Householder 法。本研究乃直接以 AHP 分析工具軟體為 Expert Choice 求得特徵向量(或優勢向量)。

五、一致性的檢定

若對成對比較矩陣為正倒值矩陣，要求決策者在成對比較時，能達到前後一致性，這是相當困難的。因此需進行一致性的檢定，以判斷是否為一致性矩陣。一致性指標的提出，主要告訴決策者在評估過程中，所作判斷的合理程度如何？是否太不一致？或有矛盾現象？作為修正參考，避免作成不良的決策。

一致性的檢定，除用於評量決策者的判斷外，尚可用於整體層級結構。由於各層級間的重要性不同，所以要測試整體層級結構是否具有一致性。一致性指標值，不論在決策者判斷的評量或是整個層級結構的測試，Saaty 建議宜在 0.1 左右(一般採 C.R.<0.1)，評估的結果要能通過一致性檢定，才可顯示填答問卷者的判斷前後一致，且具合理性。

若每一成對比較矩陣的一致性程度皆符合所需，則尚須檢定整個層級結構的一致性。如果整個層級結構的一致性程度不符合要求，顯示層級的要求關聯有問題，必須重新進行要素及其關聯性分析。計算最大特徵值($\lambda_{\max}$)與特徵向量(W)來檢定成對比較矩陣是否具有一致性，根據 Saaty 建議以一致性指標(Consistency Index, C.I.)與一致性比例(Consistency Ratio, C.R.)，檢定成對比較矩陣的一致性。

1.一致性指標(Consistency Index, C.I.)：其公式如下

$$C.I. = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n-1}$$

當 $C.I. = 0$，表示前後判斷完全一致。
當 $C.I. = 1$，表示前後判斷不一致。
而 $C.I. \le 0.1$，爲可容許偏誤。

2.隨機指標(Random Index, R.I.)：此值可藉由查表 2-7 獲得。

一致性指標(C.I.)的大小又受矩陣 A 階數及評估尺度數的影響，矩陣 A 在階數及評估尺度數皆已知情況下，所產生的 C.I.值稱為隨機指標(Radom Index, R.I.)。

3.一致性比率(Consistency Ratio, C.R.)：其公式如下

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}$$

在相同階數的矩陣下，若 $C.R. \leq 0.1$ 表示矩陣的一致性程度令人滿意。

4.整個層級結構的一致性(Consistency Ratio of the Hierarchy, C.R.H.)檢定

C.I.H.= $\sum$ (每個層級的優先向量)×(每個層級的 C.I.值)

R.I.H.= $\sum$ (每個層級的優先向量)×(每個層級的 R.I.值)

$$C.R.H = \frac{C.I.H.}{R.I.H}$$

若 $C.R.H. = \dfrac{C.I.H.}{R.I.H.} < 0.1$，則整體層級的一致性可接受。

六、選擇替代方案

各層級要素間的權重計算後，再進行整體層級權重的計算。若整個層級的結構的一致性符合要求，則可計算替代方案的優勢向量。只有一位決策者時，只需求取替代方案的綜合評點(優勢程度)即可；若有一群決策群體時，則需分別計算每一決策成員的替代方案綜合評點，再利用幾何平均數法計算求取加權綜合評點，以決定替代方案的相對重要性與優先順序。

2-2-4　AHP 之優缺點

AHP 是一種有組織的架構，可用在解決複雜問題時的有效決策，以簡化決策程序。基本上，AHP 是將複雜且非結構的情況分割成數個組成成分，安排這些成分或變數為階層次序，將每個變數的相關重要性利用主觀判斷給予數值；綜合這些判斷來決定哪一個變數有最高優先權。而問題的每個變數必須給予一個數值，以幫助決策者思考而得到結論。

一、AHP 之優點

AHP 中問題的描述即在澄清決策所希望達成的目的。故 AHP 就是將複雜的問題予以系統化，並將問題的各個考慮層面予以層級化的架構，因為層級結構(Hierarchical Structure)有助於決策者對於事物的整體了解，同時利用評估要素建構為層級形式，使工作易於達成。因此，層級式架構具有下列的優點(Vargas，1990)：

1.具有彈性

就彈性而言，若發生資料不足或遺漏部分資料時，可透過層級架構的模式彌補資料缺失，作適時的擴充或修改。

2.易於瞭解

在層級架構中，各層級元素的優先順序是逐層演變的結果，故我們可以清楚的觀察同一層元素間的彼此關係(具獨立性)及上下層元素間的彼此影響力。故在研究問題時，可利用此一關係來作元素間的分類或整合。

3.合乎邏輯

層級架構是依層級程序逐步推演的，藉此將複雜的決策問題系統化成簡明的架構，使決策者在分析時可兼顧不同元素間的邏輯關係，對於決策的正確性具有正面之幫助。將問題描述建構成層級架構後，透過量化的判斷，找出脈絡後加以綜合評估決定替代方案的優先順序(Priority)，以選擇最適當(或最佳)的方案，減少決策錯誤的發生機率。

二、AHP 之缺點

AHP 雖然具有許多的優點，但在其方法上仍有一些缺失。AHP 最初是由適用簡單的問題開始，無論任何情形，首先要確立階層結構，在進行成對比較，以求算層級內各要素的權數，並計算最後一階層各方案的權數。然而，AHP 不是萬靈丹，仍然有其缺點(鄧振源、曾國雄，1989)：

1.判斷的感覺模糊。

2.評估尺度過於細鎖：Saaty 建議使用 1～9 的尺度，其根據主要在於(1)人類無法同時對 7 種以上的事物進行比較；(2)1～9 尺度值的誤差均方根與中位數絕對誤差最小；(3)人類的區別能力以「同等重要」、「稍重要」、「頗重要」、「極重要」及「絕對重要」等五個屬性為基礎，為其精確語句連續性，宜在 5 個屬性間加入折衷值。

3.標準化方法的質疑。

Roper-Low 和 Sharp 亦指出 AHP 以下幾點缺失(嚴振昌，2001)：

1.由於層級結構的簡單化，可能隱藏某些重要的依存關係，而且過分的簡化決策問題。

2.具體(Tangible)與非具體(Intangible)屬性間的比較，較為困難。

3.由於 AHP 的特徵向量(優先向量)之大小，並未具有統計上的顯著性(Statistical Significance)，故無法提供給決策者一種明確的結果。

4.專家學者之人數及人選為其主要限制，若受訪專家人數過多或人選認定標準的偏差，將影響分析結果的一致性。

5.決策者僅在專家對替選方案的評估結果出來後才決定方案，其參與機會不多，將增加方案推行的阻力。

6.不同背景之專家因著眼點不一，其結果必有差異，產生意見相左或需協調整合的問題。

2-2-5　小結

有關指標參數的選定及其權重的評估與設定，以及最後指標的合成，傳統上大多採問卷調查法(Questionnaire survey)，然問卷調查法中又以德爾菲法技術(Dephi Method)最為眾所周知，也最為廣泛應用，因德爾菲法技術具備匿名性(Anonymity)及反覆控制回饋性(Iteration with controlled feedback)的特色，而有別於以往傳統的問卷調查法方式，因此常用以決定重要議題或變項間的重要性。

德爾菲法技術是一種專家預測法，屬於群體決策(group decision making process)技術之一，其主要的目的乃在於獲取專家共識，尋求對特定對象的一致性之意見，此法不但可收集思廣益之效，亦可兼顧專家獨力判斷的品質。但德菲法在實際運用時，常會因專家意見的收斂效果不大(即各個專家意見紛歧時)，而導致需要以增加調查的次數的方式來獲得較佳的結果，其所需成本也就越高，亦越耗時，專家的反應率也會隨之下降，而且德爾菲法是以算術平均數作為篩選評估準則的依據，在統計上極易受極端值的影響，而造成扭曲專家原意的情況發生。

此外，德爾菲法技術係依賴參與者(如專家、學者或意見領袖)之專業經驗、直覺與價值判斷，故個人主觀的介入為不可避免的事實。然在指標的應用上，德爾菲法仍有使用上的潛在限制，如過於主觀，主觀意識性較強；且因反覆回饋的運作過程也較繁瑣、費時，相對地也較費物力、人力，而缺少所謂指標系統的操作彈性。而 AHP 分析法是一種有層級的組織架構，可用在解決複雜問題時的有效決策，以簡化決策程序。基本上，AHP 是將複雜且非結構的情況分割成數個組成成分，安排這些成分或變數為階層次序，將每個變數的相關重要性利用主、客觀判斷給予數值；綜合這些判斷來決定那一個變數有最高優先權。據此，本研究為獲得更周延且具代表性的指標參數及其相對權重，以作為飲用水水質適飲性指標化之有力依據，乃採用主、客觀條件下折衷的 AHP 分析法。

本研究採用 AHP 分析法作為 PWQI 指標參數選定之研究工具，其原因可歸納為以下三點：

1.AHP 分析法可以將複雜的飲用水水質適飲性之問題，劃分為簡單明確的層級結構關係，透過學者專家等決策群組之主、客意見予以評估分析後，即可獲得水質參數對適飲性影響的重要性或貢獻度。

2.由於本論文之研究主體為飲用水中適飲性問題，涉及一般民眾主觀的偏好與感受，文獻並無明確的定論，使本研究缺乏客觀的資料、數據可供研究參考。因此，AHP 可應用於此不確定的情況下，符合本研究的需要。

3.飲用水水質之適飲與否，為一主觀且又複雜的問題，需透過各層面(產業、官員、學界、一般民眾)的共識加以分析，AHP 在理論上具有一致性檢定來檢定專家的共識性、結論的一致性，均較為客觀。

2-3　統計分析法

本研究之資料統計分析方法主要分為二個部分，分別為敘述統計分析及 AHP 層級分析。本論文運用了以下工具軟體進行統計分析：

1.敘述性統計分析

統計分析方法主要應用在飲用水水質檢測數據及問卷調查結果之分析，其分析工具軟體包括 Microsoft Excel、Microsoft Access、SAS、SPSS 等。

2.AHP 層級分析法

AHP 層級分析法則是評估適飲性水質參數之相對權重及優先次序，以選定飲用水水質適飲性指標化之指標參數，其使用分析工具軟體為 Expert Choice。

2-4　小結

關於飲用水水質適飲性指標(PWQI)之建立，溯源探究其實乃為 PWQI 之指標參數的選定及其指標合成過程中之指標的評量(Rating)方式與權重(Weighting)之設定(或賦予)。由於目前尚無一套評估準則可依循，本研究一方面需考量如何在眾多而且複雜的水質項目中，選出具代表性的水質參數，作為飲用水水質適飲性指標化之指標參數；另一方面則需將這些指標參數加以量化，評估指標參數對飲用水水質適飲性影響之特性，考量副指標函數與結合函數之功能，進一步合成為單一指標數值，而能真實反應出台灣各地區飲用水水質適飲的狀況，惟此二者在學界中，迄今均未有相關研究或建立相關的共識，因此而留下諸多研究的空間。

經由本章之環境指標系統與有關研究方法理論加以探討後，對於本研究所要建立飲用水水質適飲性指標(PWQI)的理論基礎有更深入的瞭解。其中為獲得具代表性的指標參數及其相對權重，以作為飲用水水質適飲性指標化之有力依據，本研究乃採用 AHP 分析法，借重學者專家等決策成員之偏好權重來評估各適飲性水質項目的相對權重及優先順序。同時藉由問卷調查方式來決定副指標值的範圍值與轉折點(Breakpoints)，以描述不同適飲程度，並設定各水質參數濃度對適飲性影響程度之評點，以建立較為周延且具代表性的飲用水水質適飲性指標。另於本論文之第五章將介紹本研究所列之研究方法如何運用在飲用水水質適飲性的問題上，第六章則進行飲用水水質適飲性指標之實證研究分析，希冀對國內飲用水水質管理有一些貢獻。